Serie 2

- 1. a)** Es sei $N \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine $(n-1)$ -dimensionale Jordan-Nullmenge. Zeige: Dann ist $N \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale J.-Nullmenge. 2 Pkte.
- b)** Es sei $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeige: Dann ist $\text{graph } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in A\}$ eine n -dimensionale J.-Nullmenge. 1 Pkt.
- c)** Beweise oder widerlege: $\text{graph } f$ für $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $X \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ist genau dann eine n -dimensionale Nullmenge, wenn ∂X eine $(n-1)$ -dimensionale Nullmenge ist. 1 Pkt.

- 2. a)** Berechne das Volumen von $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, |z| \leq 2\}$. 1 Pkt.
- b)** Berechne das Volumen eines Tetraeders mit der Kantenlänge l . 1 Pkt.
- c)** Integriere die Funktion z^2 über die Kugel $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$. 2 Pkte.

- 3.** Der Schwerpunkt einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positiven Volumen V ist definiert durch den Punkt $S = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$s_i = \frac{1}{V} \int_K x_i d^n x, \quad i = 1, \dots, n.$$

Berechne den Schwerpunkt

- a)** von $\{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. 2 Pkte.
- b)** eines Kegels $K(B, h) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq z \leq h, x \in (1 - \frac{z}{h})B\}$, $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ Jordan-messbar. 2 Pkte.
- 4.** Es sei $C \subset \mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen, die eine Dezimalbruchdarstellung besitzen, in welcher die Ziffer 5 nicht vorkommt. Zeige:
- a)** C ist eine 1-dimensionale Nullmenge. 3 Pkte.
- b)** C lässt sich bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbilden. 1 Pkt.

Rückgabe: In den Kasten am 26.10.