Serie 1

1. **a)** *(1 Punkt)* Betrachte den topologischen Raum $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Äquivalenzrelation erzeugt durch $x \sim -x$ f.a. $|x| > 1$. Sei $Y = X/\sim$ versehen mit der Quotienten-Topologie. *Zeige*: Y ist kein Hausdorffraum.

b) *(1 Punkt)* Ein topologischer Raum X heißt **normal** genau dann, wenn f.a. disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ disjunkte offene Umgebungen $U, V \subset X$ existieren, also $A \subset U$, $B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$. *Zeige:* Jeder metrische Raum (X, d) ist normal.

c) *(2 Punkte)* Es seien X, Y normale topologische Räume, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to Y$ eine stetige Abbildung. Definiere auf der disjunkten Vereinigung $X \dot\cup Y$ mit der induzierten Topologie die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt durch $x \sim f(x)$ für alle $x \in A$. *Zeige*: Dann ist der Quotientenraum

$$X \sim_f Y := (X \dot\cup Y)/\sim$$

mit der Quotiententopologie wieder ein normaler topologischer Raum.

d) *optionale Aufgabe (3 Punkte)*: Zeige, daß jeder parakompakte Hausdorffraum normal ist. (*Auch wenn Sie diese Aufgabe nicht bearbeiten, sollte Sie sich diese Aussage dennoch merken. Insbesondere ist also jede Mannigfaltigkeit ein normaler, topologischer Raum!*)

2. **a)** *(2 Punkte)* Seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $\dim X = n$, $\dim Y = m$. Das kartesische Produkt $X \times Y$ trage die Produkt-Topologie, das heißt die kleinste Topologie, so daß die Projektionsabbildungen $\pi_1 : X \times Y \to X$ und $\pi_2 : X \times Y \to Y$ stetig sind. *Zeige*: $X \times Y$ trägt eine kanonische induzierte Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$, so daß π_1 und π_2 differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten sind.

b) *(2 Punkte)* Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f : X \to X$ ein Diffeomorphismus. Betrachte auf dem Produktraum $[0,1] \times X$ die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt durch $(0, x) \sim (1, f(x))$. *Zeige*: Der Quotientenraum

$$X_f := [0,1] \times X/\sim$$

trägt die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim X + 1$ und die Abbildung $\pi : X_f \to S^1$, $\pi([t,x]) = [t]$ mit $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0,1]/(0 \sim 1)$ ist eine differenzierbare Abbildung. Der topologische Raum X_f heißt der **Abbildungstorus** zu f.

3. **a)** *Zeige (2 Punkte)*: Die Gruppe der speziellen, orthogonalen Transformationen

$$\mathsf{SO}(n, \mathbb{R}) := \{ A \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}, \det A = 1 \}$$

trägt die Struktur einer glatten, kompakten Mannigfaltigkeit. Gib außerdem die Dimension an.

b) *Zeige (2 Punkte)*: Die Mannigfaltigkeiten $\mathsf{SO}(3, \mathbb{R})$ und $\mathbb{RP}^3$ sind diffeomorph.

Bitten wenden!

4. In dieser Aufgabe sollen die in der Differentialgeometrie und -topologie sehr wichtigen **Grassmann-Mannigfaltigkeiten** definiert werden: Wir definieren die Menge

$$G(n,k) := \{\, U \subset \mathbb{R}^n \mid U \text{ ist ein Untervektorraum der Dimension } k \,\}\,.$$

a) *(1 Punkt)* Zunächst müssen wir auf $G(n,k)$ eine Topologie eines Hausdorffraumes definieren: Sei $U \in G(n,k)$ und $(V_r) \subset G(n,k)$ eine Folge. Wähle eine Basis $u_1,\ldots,u_k$ von U und ergänze diese zu einer Basis $u_1,\ldots,u_n$ von $\mathbb{R}^n$. Sei $U^\perp := \mathrm{span}\{u_{k+1},\ldots,u_n\}$. Wir sagen nun $\lim_{r\to\infty} V_r = U$ genau dann, wenn es ein $r_o \in \mathbb{N}$ gibt, so daß alle V_r mit $r \geq r_o$ als Graph einer linearen Abbildung $v_r\colon U \to U^\perp$ geschrieben werden können, deren Matrix-Darstellung bzgl. $\{u_1,\ldots,u_n\}$ durch eine $k \times (n-k)$-Matrix $A_r \in M(k,n-k)$ gegeben ist und so daß gilt: $\lim_{r\to\infty} A_r = 0$ im bekannten Sinne.
Zeige: Dieser Konvergenzbegriff $V_r \to U$ ist wohldefiniert, unabhängig von der Wahl der $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{R}^n$.

b) Wir definieren nun eine Teilmenge $X \subset G(n,k)$ als Umgebung von $U \in G(n,k)$ genau dann, wenn zu jeder Folge $(V_r) \subset G(n,k)$ mit $V_r \to U$ ein $r_o \in \mathbb{N}$ existiert mit $V_r \in X$ f.a. $r \geq r_o$. Eine Teilmenge $Y \subset G(n,k)$ heißt nun offen genau dann, wenn für alle Punkte $U \in Y$ eine Umgebung X existiert so daß $U \in X \subset Y$.
Zeige (1 Punkt): Mit dieser Topologie ist $G(n,k)$ ein Hausdorffraum.

c) *optional (3 Punkte)*: Zeige, daß $G(n,k)$ ein kompakter topologischer Raum ist.

d) *Zeige (2 Punkte)*, daß $G(n,k)$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist und bestimme die Dimension.
Hinweis: Als Kartenumgebungen können zum Beispiel folgende Mengen gewählt werden: Sei $U \in G(n,k)$ ein beliebiger Punkt und wähle einen Unterraum $U^\perp$ von $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$. Dann ist $\{\, V \in G(n,k) \mid V \cap U^\perp = \{0\} \,\}$ ein Kandidat für eine Kartenumgebung von U.
Bemerkung: $G(n,k)$ heißt eine **Grassmann-Mannigfaltigkeit**. Die reell projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ sind nun genau die speziellen Grassmann-Mannigfaltigkeiten $G(n,1)$.

Rückgabe: Mittwoch, 22.10.03, in der Übung.