Serie 9

1. Seien $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum (d.h. Menge mit σ-Algebra) und $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-messbare Funktionen, sowie $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. *Zeige*: Dann sind auch folgende Funktionen $\mathcal{A}$-messbar:

a) $f + g, f - g$,

b) $f \cdot g$,

c) $\max(f, g)$ mit

$$\max(f,g)(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq g(x), \\ g(x), & f(x) \leq g(x), \end{cases}$$

und analog $\min(f, g)$,

d) $\varphi \circ f$.

2. **a)** Berechne folgendes Lebesgue-Integral direkt aus der Definition $\int_X f\, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{\, x \in X \mid f(x) > t\,\})\, dt$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} d\lambda^1(x)\,.$$

b) Seien $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ sei das Zählmaß und $f(n) = q^{-n}$ mit $q > 1$ fest. Zeige explizit gemäß der obigen Definition des Lebesgue-Maßes, daß

$$\int_{\mathbb{N}} f(n)\, d\mu(n) \;=\; \log q \int_0^\infty [s] q^{-s} ds \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} q^{-n}\,.$$

3. Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g \geq 0$ messbare und μ-integrierbare Funktionen mit jeweils endlichen Wertebereichen

$$f(X) = \{\, a_1, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{R}, \qquad g(X) = \{\, b_1, \ldots, b_l\} \subset \mathbb{R}\,.$$

Zeige direkt und ohne Anwendung des Satzes IV.2.5 aus der Vorlesung:
$f + g$ ist ebenfalls μ-integrierbar mit endlichem Wertebereich, und es gilt

$$\int_X (f+g) d\mu \;=\; \int_X f\, d\mu \;+\; \int_X g\, d\mu\,.$$

Verwende die Definition von $\int_X f\, d\mu$ aus der Vorlesung !

Bitten wenden!

4. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

a) Sei $f\colon X \to [0, +\infty]$ messbar. *Zeige*:

$$\int_X f \, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\,.$$

b) Sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ messbar und $\int_A f \, d\mu = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$. *Zeige*: $f = 0$ μ-fast überall.

Rückgabe: In den Übungsgruppen am 09.01.07 und 10.01.07