Serie 8

1. Es seien $0 < 2r < R$. Betrachte die Kurven

$$\gamma_1(t) = \big(R + r\cos 2\pi t, 0, r\sin 2\pi t\big),$$
$$\gamma_2(t) = \big((R-r)\cos 2\pi t, (R-r)\sin 2\pi t, 0\big)\,.$$

a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ die offene Teilmenge

$$U = \left\{\, (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \in \big((r-\varepsilon)^2, (r+\varepsilon)^2\big) \,\right\}$$

für $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$. Finde 1-Formen $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^1(U)$ mit $d\alpha_1 = d\alpha_2 = 0$ und

$$\int_{\gamma_i} \alpha_i \;=\; \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2\,.$$

b) Kann man solche α_1, α_2 auch für $U = \mathbb{R}^3$ finden? Begründe.

Hinweis: Betrachte die problemangepassten Koordinaten $(x,y,z) = \big((R+\varrho\cos\vartheta)\cos\varphi, (R+\varrho\cos\vartheta)\sin\varphi, \varrho\sin\vartheta\big)$ *und berechne* $(d\varrho, d\vartheta, d\varphi)$ *in der Basis* (dx, dy, dz)*, vgl. Serie 6, Aufg. 3.a)*

2. **a)** Berechne für α_1, α_2 aus Aufgabe 1.a)

$$\int_F \alpha_1 \wedge \alpha_2$$

für $F = \left\{\, (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \,\right\}$.

b) Die in Aufgabe 1.a) gesuchten Differentialformen α_1 und α_2 in $\Omega^1(U)$ sind nicht eindeutig bestimmt. Zeige, daß für jede andere Wahl für diese beiden Formen bezüglich der gestellten Bedingungen dasselbe Ergebnis $\int_F \alpha_1 \wedge \alpha_2$ in 2. a) herauskommt.

3. Es sei $\varrho\colon S^2_R \to \mathbb{R}$ eine Massenverteilung auf der 2-dimensionalen Sphäre vom Radius R. Dann ist das Gravitationspotential Φ an dem Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S^2_R$ gegeben durch

$$\Phi(\vec{x}) \;=\; \int_{S^2_R} \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}\, d^2S(\vec{y})\,.$$

Sei nun die Massendichte ϱ auf der Sphäre S^2_R konstant. *Zeige*:
Φ ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetig definiert und es gilt:

$$\Phi(\vec{x}) = \begin{cases} 4\pi R\varrho, & \text{für } |\vec{x}| \le R, \\ \frac{4\pi R^2\varrho}{|\vec{x}|}, & \text{für } |\vec{x}| \ge R\,. \end{cases}$$

Hinweis: Betrachte zuerst $\vec{x} = (0,0,a)$, $a \neq R$, und verwende dann Symmetrieargumente.

Bitten wenden!

4. Es sei X ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Definiere die sogenannte **Kontraktion**

$$\begin{aligned} X \lrcorner \colon \Omega^k(U) &\to \Omega^{k-1}(U), \\ X \lrcorner\, \omega &= \omega(X, \cdot, \dots, \cdot), \end{aligned}$$

also

$$(X \lrcorner\, \omega)(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(p)(X(p), v_1, \dots, v_{k-1})$$

für alle $p \in U$, $v_1, \dots, v_{k-1} \in \mathbb{R}^n$.

a) Seien $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \in \Omega^4(\mathbb{R}^4)$ und $X = (X^1, X^2, X^3, X^4)$ ein Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^4$. Berechne $X \lrcorner\, \omega$ und $d(X \lrcorner\, \omega)$.

b) Sei $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 \in \Omega^4(\mathbb{R}^4)$, mit $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$. Sei $H \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und definiere das Vektorfeld X_H durch

$$X_H \lrcorner\, \omega = -dH\,.$$

Zeige: $X_H = J\nabla H$, wobei $J \colon \mathbb{C}^2 \to C^2$ der lineare Operator $J(h, k) = (ih, ik)$ ist. X_H heißt das **Hamiltonsche Vektorfeld** zur Hamiltonfunktion H.

Rückgabe: In den Übungsgruppen am 12.12. und 13.12.