Serie 7

1. **a)** Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi\colon U \to V$ ein C^∞-Diffeomorphismus und $\omega \in \Omega^k(V)$, sowie $c \in C_k(U)$ eine k-Kette der Form $c = n_1\sigma_1 + \ldots + n_r\sigma_r$. Zeige: Dann gilt für $\varphi(c) = n_1\varphi\circ\sigma_1 + \ldots + n_r\varphi\circ\sigma_r$,

$$\int_{\varphi(c)} \omega = \int_c \varphi^*\omega\,.$$

b) Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres parametrisiertes Flächenstück mit Normalenfeld $n\colon U \to S^2$. Es sei $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3(n,\cdot,\cdot)$. Dies liefert eine 2-Form auf $F = f(U)$. Zeige: $\int_F \omega$ ist gleich dem Flächeninhalt von F.

2. **a)** Finde $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$ mit $d\omega = 0$, so daß es kein $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$ gibt, mit $d\alpha = \omega$.

b) Finde $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y,0)|\, x^2+y^2=1\})$ mit $d\alpha = 0$, so daß es kein $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y,0)|\, x^2+y^2=1\})$ gibt mit $df = \alpha$.

3. **a)** Es sei $E^n \subset \mathbb{R}^n$ der abgeschlossene Einheitsball und $\partial E^n = S^{n-1}$. Es sei $h\colon E^n \to S^{n-1}$ eine C^∞-Abbildung. Zeige: Dann kann nicht $h_{|S^{n-1}} = \mathrm{id}$ gelten. Hinweis: Berechne $\int_{\partial E^n} h^*\omega$ für die $(n-1)$-Form $\omega = x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n + \ldots + (-1)^{n-1} x_n dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$.

b) Zeige: Es gibt keine glatte Abbildung $f\colon E^n \to E^n$ ohne einen Fixpunkt $x \in E^n$ mit $f(x) = x$. Hinweis: Zeige, falls doch, so könnte man ein h wie in a) konstruieren mit $h_{|S^{n-1}} = \mathrm{id}$.

4. **a)** Berechne $\int_F \omega$ für

$$F = \{\, (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \,\}$$

und $\omega = x dy \wedge dz - z^2 dx \wedge dz$.

b) Gibt es einen C^∞-Diffeomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ so dass für $\omega_o = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ und $\Sigma = \varphi(F) \times \{0\}$ mit F aus a) gilt: $\int_\Sigma \omega_o > 0$?
Hinweis: Zeige

$$\int_\Sigma \omega_o = \int_F \varphi^*(dx_1 \wedge dx_2)\,.$$

Rückgabe: In den Übungsgruppen am 05.12. und 06.12.