Serie 5

1. **a)** Sei

$$F = \{\, (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2,\; y^2+z^2 \geq \frac{r^2}{9} \,\} \qquad 0 < r < R,$$

orientiert durch $\vec{n}$ mit $\vec{n}(R,0,r) = (0,0,1)$. Berechne ∂F und bestimme die induzierte Orientierung. Sei $\vec{X} = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$ und berechne $\iint_F \vec{X} \cdot \vec{dS}$.

b) Sei $F = \{\, (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \,\}$ und berechne $\iint_F \operatorname{rot} \vec{X} \cdot \vec{dS}$ für ein beliebiges C^1-Vektorfeld $\vec{X}$ auf F.

2. Es seien $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ C^1-Vektorfelder und ψ eine C^1-Funktion auf einer offenen Menge in $\mathbb{R}^3$. Wir verwenden die Notationen

$$\vec{r} = (x,y,z), \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r},$$

sowie $\Delta\vec{X} = (\Delta X^1, \Delta X^2, \Delta X^3)$ und $\vec{X} \cdot \nabla = (X^1 \frac{\partial}{\partial x}, X^2 \frac{\partial}{\partial y}, X^3 \frac{\partial}{\partial z})$

a) Leite folgende oft benutzte Formeln her:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{X}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{X}) - \Delta\vec{X}, \\
\nabla \cdot (\psi\vec{X}) &= \vec{X} \cdot \nabla\psi + \psi\nabla \cdot \vec{X}, \\
\nabla \times (\psi\vec{X}) &= \nabla\psi \times \vec{X} + \psi\nabla \times \vec{X}, \\
\nabla(\vec{X} \cdot \vec{Y}) &= (\vec{X} \cdot \nabla)\vec{Y} + (\vec{Y} \cdot \nabla)\vec{X} + \vec{X} \times (\nabla \times \vec{Y}) + \vec{Y} \times (\nabla \times \vec{X}), \\
\nabla \cdot (\vec{X} \times \vec{Y}) &= \vec{Y} \cdot (\nabla \times \vec{X}) - \vec{X} \cdot (\nabla \times \vec{Y}),
\end{aligned}$$

b) Berechne

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla\psi &= \\
\nabla \cdot (\nabla \times \vec{X}) &= \\
\nabla \cdot \vec{r} &= \\
\nabla \times \vec{r} &= \\
\nabla \cdot \vec{n} &= \\
\nabla \times \vec{n} &=
\end{aligned}$$

Bitten wenden!

3. Verwende die gleichen Notationen wie in 2.)

a) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Berechne $\nabla \cdot (f(r)\vec{r}\,)$ und f so, daß die Divergenz 0 ergibt.

b) Finde ein divergenzfreies Vektorfeld $\vec{X}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, welches kein Rotationsfeld ist, also daß kein $\vec{Y}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $\nabla \times \vec{Y} = \vec{X}$ existiert.

4. Es seien $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. *Zeige*:

$$\alpha \wedge \omega = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \alpha \wedge \beta \quad \text{für ein } \beta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)\,.$$

Rückgabe: In den Übungsgruppe am 21.11. bzw. in der Vorlesung am 23.11.