Serie 4

1. Es sei $T \subset \mathbb{R}^3$ der Torus

$$\{ (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \} \qquad 0 < r < R\,.$$

a) Berechne das Einheitsnormalenfeld $\vec{n}$ auf T mit $n(r+R,0,0) = (1,0,0)$ und für das Vektorfeld $v(x,y,z) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0)$ das Integral $\int_T v \cdot \vec{dS}$ bzgl. der Orientierung durch n.

b) Berechne direkt (ohne Verwendung des Satzes von Gauß) das Integral

$$\iiint_V \operatorname{div} v d^3(x,y,z)$$

über den Volltorus V mit $\partial V = T$.

2. a) Berechne zu dem orientierten Torus T und $\vec{n}$ wie in Aufgabe 1.) das Integral $\int_T v \cdot \vec{dS}$ mit $v(x,y,z) = (x,y,z)$. Wie verhält sich dieses Integral zum Volumen des Volltorus V mit $\partial V = T$?

b) Berechne das äußere Einheitsnormalenfeld zu

$$P \;=\; \{ (x,y,z) \,|\, 0 < z < 1 - x^2 - y^2 \}$$

und das Integral $\int_{\partial P} v \cdot \vec{dS}$ zu dem Vektorfeld $v(x,y,z) = (x + 2y + z^2, x^3 + y - z, x^2 - y^3 + z)$ mit Hilfe des Satzes von Gauß.

3. Es sei $v\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, welches auf einer Umgebung U eines beschränkten Gebiets G stetig differenzierbar ist, und das Gebiet G habe einen durch ein äußeres Normalenfeld orientieren Rand ∂G, so dass die Voraussetzungen des Satzes von Gauß erfüllt sind. Sei außerdem $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. *Zeige*:

$$\int_G \nabla f \cdot v d^3(x,y,z) \;=\; \int_{\partial G} f v \cdot \vec{dS} \;-\; \int_G f \operatorname{div} v \, d^3(x,y,z)\,.$$

4. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein offenes Gebiet, $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ein zeitunabhängiges Geschwindigkeitsfeld und $\varrho\colon \mathbb{R} \times \Omega \to [0,\infty)$ eine zeitabhängige stetig differenzierbare Dichtefunktion auf Ω. Wir sagen: $H = \varrho\, v$ und ϱ genügen der Masseerhaltung in Ω, wenn

$$\frac{d}{dt} \int_B \varrho d^3V \;=\; - \int_{\partial B} H \cdot \vec{dS}$$

für alle offenen Gebiete $B \subset \Omega$ gilt, welche die Voraussetzungen des Satzes von Gauß erfüllen und deren Rand durch das äußere Normalenfeld orientiert ist. *Zeige*: Die Masseerhaltung gilt, wenn

$$\operatorname{div} H + \frac{\partial}{\partial t} \varrho = 0\,.$$

optional (2 Punkte): Zeige, daß diese Bedingung für Masseerhaltung auch notwendig ist.

Rückgabe: In den Übungsgruppe am 14.11. bzw. 15.11.