Serie 10

1. **a)** *Zeige*: Ist $K \subset \mathbb{R}^k$ kompakt und $(f_n \colon K \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen, welche gleichmäßig gegen $f \colon K \to \mathbb{R}$ konvergieren, so ist auch f Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\lim \int_K f_n \, d\lambda^k \;=\; \int_K f \, d\lambda^k \,.$$

(*Hinweis: Zeige: gleichmäßige Konvergenz impliziert Lebesgue-majorisierte Konvergenz*)

b) Gilt dies auch für $K = \mathbb{R}^k$? Begründe!

2. Untersuche folgende Funktionenfolgen $f_n \colon I \to \mathbb{R}$. Beantworte die Fragen (mit Begründung):

- Ist $\lim f_n$ Lebesgue-integrierbar?
- Existiert $\lim \int_I f_n(x) d\lambda^1(x)$?
- Ist $\int_I \lim f_n d\lambda^1 = \lim \int_I f_n d\lambda^1$?
- Welche Form von Konvergenz liegt für (f_n) vor: gleichmäßig, Lebesgue-majorisiert?

a) $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ auf $I = \mathbb{R}$,

b) $\frac{nx}{1+nx^2}$ auf $I = [0,1]$,

c) $f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{3}{2}}, & 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 2\sqrt{n} - n^{\frac{3}{2}} x, & \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}, \\ 0, & x \ge \frac{2}{n}, \end{cases},$

d) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le n - \frac{1}{n}, \\ nx + 1 - n^2, & n - \frac{1}{n} \le x \le n, \\ 1 + n^2 - nx, & n \le x \le n + \frac{1}{n}, \\ 0, & x \ge n + \frac{1}{n}, \end{cases}$

3. **a)** Zeige, daß die Funktion $\frac{\sin t}{t}$ auf $(0,\infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar ist.
Hinweis: $\frac{\sin t}{t} \ge \frac{\sin t}{(2k+1)\pi}$ für alle $2k\pi \le t \le (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

b) Zeige, daß das uneigentliche Riemannsche Integral $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt$ existiert.
Hinweis: Zeige $\left| \int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \frac{sint}{t} dt \right| \le \frac{2}{(l+1)\pi}$ und verwende das Leibniz'sche Konvergenz-Kriterium für alternierende Reihen.

4. Es sei

$$F(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-st} \frac{\sin t}{t} d\lambda^1(t) \,.$$

Bitten wenden!

a) Zeige, daß $F(s)$ für $s > 0$ im Sinne des Lebesgue-Integrals wohldefiniert ist.

b) Zeige, daß $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

c) Zeige, daß $F(s)$ für $s > 0$ differenzierbar ist und

$$F'(s) = -\frac{1}{1+s^2}\,.$$

d) Zeige: $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s$.

e) **optional (2 Pkte)**: Zeige, daß $\int_{[a,\infty)} e^{-st}\frac{\sin t}{t}\,d\lambda^1(t) = \int_a^\infty e^{-st}\frac{\sin t}{t}\,dt$ und daß der Betrag hiervon unabhängig von $s \geq 0$ gegen einen Wert $M(a)$ abgeschätzt werden kann mit $\lim_{a\to\infty} M(a) = 0$.

Hieraus folgt

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \;=\; \lim_{s\to 0} F(s) \;=\; \frac{\pi}{2}\,.$$

Rückgabe: In den Übungsgruppen am 16.01.07 und 17.01.07