Aufgabensammlung für eine Übungsklausur

Es dürfen **keine** Hilfsmittel (Taschenrechner, Skript, Buch, Notizen, etc.) verwendet werden.

Endergebnisse, Lösungswege und getroffene Aussagen sollten formuliert werden.

1. a) Berechnen Sie das 4-dimensionale Volumen des Balles

$$B^4(r) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1, \} .$$

b) Es sei im Folgenden $v_n(r)$ das n-dimensionale Volumen des n-dimensionalen Balles vom Radius $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$.
Begründen Sie, warum es eine Konstante $c_n > 0$ gibt, die nur von der Dimension n abhängt, so daß

$$v_n(r) = c_n r^n \quad \text{für alle } \; r > 0,\; n \in \mathbb{N} .$$

c) Zeigen Sie

$$c_n = \frac{2\pi}{n} \cdot c_{n-2} \quad \text{für alle } \; n \geq 2,$$

mit $c_0 := 1$. (*Hinweis: Man berechne zuerst f_n mit $c_n = f_n c_{n-1}$ f.a. n.*)

2. Sei eine Fläche F als der Graph von $z = f(x, y) = 1 - x^2 + y^3$ über dem Rechteck $(x, y) \in [0, 1] \times [1, 3]$ gegeben. Sei $\vec{X}$ das Vektorfeld $\vec{X}(x, y, z) = (z, x, y/2)$. Bestimmen Sie den Fluß von $\vec{X}$ durch F.

Bitten wenden!

3. Sei eine geschlossene Kurve $\gamma\colon [0,a] \to \mathbb{R}^2$ ohne Selbstschnittpunkte in der oberen Halbebene in der Form

$$\gamma(u) = \big(f(u), g(u)\big), \quad g(u) > 0, \quad (f')^2 + (g')^2 = 1$$

für alle $0 \le u \le a$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Länge L der Kurve γ und eine Formel für den Schwerpunkt

$$S_\gamma = (x_\gamma, y_\gamma) = \big(1/L \int_\gamma x\, ds, 1/L \int_\gamma y\, ds\big)$$

von γ in den Ausdrücken f und g.

b) Es sei $F \subset \mathbb{R}^3$ die Fläche, welche durch Rotation von γ um die x-Achse entsteht.
Zeigen Sie: Der Flächeninhalt von F ist gleich $2\pi y_\gamma L$,

4. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{X}(x,y,z) = (0,y,0)$ durch die Oberfläche des Körpers

$$K = \{\, (x,y,z) \,|\, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x^2 + y^2 \le 4z^2 \,\}\,.$$

5. Finden Sie ein rotationsfreies Vektorfeld $\vec{X}$ auf $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(1,0,z) \,|\, z \in \mathbb{R}\,\}$, welches kein Gradientenfeld auf G ist, d.h. es existiert kein Potential $\Phi\colon G \to \mathbb{R}$ mit $\vec{X} = \operatorname{grad} \Phi$.

6. a) Welche Dimension hat $\Lambda^3(\mathbb{R}^5)$? Begründen Sie!

b) Zeigen Sie, daß für $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ mit $\omega \wedge \omega \neq 0$ kein $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4)$ existiert, so daß $\alpha \wedge \omega = 0$.

c) Berechnen Sie $d(x^2 e^y dz - y \sin z\, dx + x^2 dy)$.

7. a) Geben Sie die Definition einer Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Bitte wenden!

b) Zeigen Sie gemäß der Definition, daß

$$\left\{ x \in \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mid a_k \in \{0,2\} \text{ f.a. } k \in \mathbb{N} \right\}$$

eine Nullmenge im $\mathbb{R}$ ist.

8. Es sei $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Borel-Menge mit Lebesgue-Maß $\lambda_n(K) = c$. Geben Sie den Wert $\lambda_n(\Phi(K))$.

9. Es sei $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\Phi(x,y) \;=\; (e^x \cos y, e^x \sin y)\,.$$

Berechnen Sie das Lebesgue-Maß $\lambda_2(\Phi((-\infty, 0] \times [0, 2\pi]))$.