Beweis von Thm I.1.11 (Lebesguesches Integrabilitätskriterium)

Gegeben: $R \subset \mathbb{R}^n$ Rechteckmenge, $f\colon R \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion.

Zu zeigen: ... f ist R.-int'bar $\Leftrightarrow D = \{\, x \mid f \text{ unstetig bei } x \,\}$ ist eine Nullmenge.

"$\Leftarrow$":

Schritt 1: Sei D eine Nullmenge. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge von Rechteckmengen $I_1, I_2, \ldots$ mit

$$D \subset \overset{\circ}{I}_1 \cup \overset{\circ}{I}_2 \cup \ldots \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} v_n(I_k) < \varepsilon\,.$$

Schritt 2: Sei $\xi \in R \setminus D$, also f ist stetig in ξ. Daher existiert eine Rechteckmenge $J(\xi)$ so daß

$$\xi \in \overset{\circ}{J}(\xi) \qquad \text{und für alle } x \in R \cap J(\xi) \text{ gilt } \big|f(x) - f(\xi)\big| < \frac{\varepsilon}{3},$$

also insbesondere

$$\sup_{x \in J(\xi) \cap R} f(x) - \inf_{x \in J(\xi) \cap R} f(x) \; < \; \varepsilon\,.$$

Wir haben also eine Auswahlfunktion $R \setminus D \ni \xi \mapsto J(\xi)$.

Schritt 3: Also ist

$$R \subset \overset{\circ}{I}_1 \cup \overset{\circ}{I}_2 \cup \ldots \cup \bigcup_{x \in R \setminus D} \overset{\circ}{J}(\xi)$$

eine offene Überdeckung der kompakten Rechteckmenge R. Aus der Kompaktheit folgt, dass es eine endliche Teilüberdeckung gibt, also $k \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $\xi_1, \ldots, \xi_r \in R \setminus D$, so daß

$$R \subset \overset{\circ}{I}_1 \cup \ldots \cup \overset{\circ}{I}_k \cup \overset{\circ}{J}(\xi_1) \cup \ldots \cup \overset{\circ}{J}(\xi_r)\,.$$

Wir bilden nun durch Verlängerung der Kanten von $I_1, \ldots, J(\xi_r)$ eine Zerlegung Z von R, und zwar die gröbste Zerlegung von R, so daß alle Teilrechtecke von Z in mindestens einem der $I_1, \ldots, J(\xi_r)$ liegen.
Es seien $\mathcal{R}'$ eine Menge von Teilrechtecken, die alle in einem der $I_1, \ldots, I_k$ liegen, $\mathcal{R}''$ eine Menge von Teilrechtecken, die alle in einem der $J(\xi_1), \ldots, J(\xi_r)$ liegen, so daß $\mathcal{R}' \cup \mathcal{R}''$ alle Teilrechtecke der

Bitten wenden!

Zerlegung Z umfasst und $\mathcal{R}' \cap \mathcal{R}'' = \emptyset$.
Dann gilt:

$$U(f,Z) \,-\, L(f,Z) \,=\, \sum_{I' \in \mathcal{R}'} \big(\sup_{I'} f - \inf_{I'} f\big)\, v_n(I') \quad + \quad \sum_{I'' \in \mathcal{R}''} \big(\sup_{I''} f - \inf_{I''} f\big)\, v_n(I')\,.$$

Da f auf R beschränkt ist, existiert ein $c > 0$ mit $-c \leq f(x) \leq c$ f.a. $x \in R$. Daraus folgt

$$\sup_{I'} f - \inf_{I'} f \,\leq 2c \qquad \text{f.a. } I' \in \mathcal{R}'\,.$$

Aus Schritt 1 folgt somit

$$\sum_{I' \in \mathcal{R}'} \big(\sup_{I'} f - \inf_{I'} f\big)\, v_n(I') \,<\, 2c\varepsilon\,.$$

Aus Schritt 2 folgt

$$\sup_{I''} f - \inf_{I''} f \,< \varepsilon \qquad \text{f.a. } I'' \in \mathcal{R}''$$

und somit

$$\sum_{I'' \in \mathcal{R}''} \big(\sup_{I''} f - \inf_{I''} f\big)\, v_n(I'') \,<\, \varepsilon v_n(R)\,.$$

Also gilt insgesamt

$$U(f,Z) - L(f,Z) \,<\, \big[2c + v_n(R)\big]\varepsilon\,.$$

Somit ist das Riemann-Kriterium (Satz I.1.2) für f erfüllt und f ist Riemann-integrierbar.

"$\Rightarrow$": Sei nun umgekehrt f R.-int'bar.
Zu zeigen ist: $D(f) = \{\, x \in R \,|\, f \text{ ist nicht stetig in } x \,\}$ ist eine Nullmenge.

Schritt 1: Es sei

$$S_n(f) \,=\, \big\{\, x \in R \,|\, \forall \text{Umgebung } U \text{ von } x \quad \exists y \in U \cap R \text{ s.d. } |f(x) - f(y)| > \frac{1}{n} \,\big\},$$

d.h. in $x \in S_n(f)$ springt f um mindestens $\frac{1}{n}$.
Dann gilt: $D(f) = S_1(f) \cup S_2(f) \cup \ldots$.
Es bleibt also zu zeigen: Jedes $S_n(f)$ ist eine Nullmenge.

Schritt 2: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $S_n(f) \neq \emptyset$. Nach dem Riemann-Kriterium (Satz I.1.2) existiert eine Zerlegung Z von R, so daß

$$U(f,Z) - L(f,Z) \,<\, \frac{\varepsilon}{n}\,.$$

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Teilrechtecke von Z, also

$$S_n(f) \subset \bigcup_{I \in \mathcal{R}} \big(S_n(f) \cap \mathring{I}\big) \,\cup\, \bigcup_{I \in \mathcal{R}} \big(S_n(f) \cap \partial I\big)\,.$$

Da ∂I jeweils eine Nullmenge ist, ist die zweite Vereinigunsmenge ebenfalls eine Nullmenge. Es genügt also die Menge $\mathcal{R}'$ aller der Teilrechtecke I' zu betrachten, für die gilt $S_n(f) \cap \mathring{I}' \neq \emptyset$.
Also

$$\sum_{I' \in \mathcal{R}'} \big(\sup_{I'} f - \inf_{I'} f\big) v_n(I') \,\leq U(f,Z) - L(f,Z) < \frac{\varepsilon}{n}\,.$$

Da nach Definition von $S_n(f)$ gilt: $\sup_{I'} f - \inf_{I'} f \geq \frac{1}{n}$, folgt

$$\sum_{I' \in \mathcal{R}'} v_n(I') < \varepsilon\,.$$

Also ist $S_n(f)$ eine Nullmenge und somit auch $D(f)$.