Serie 8

1. Beweisen Sie folgende Homöomorphien:

a) **(L)** $B_r^n(0) \setminus \{0\} \approx S^{n-1} \times [0, \infty)$, mit $B_r^n(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq r\}$, $r > 0$, $S^{n-1} = \partial B_1^n(0)$. *(1 Pkt.)*

b) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1 \} \approx \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. *(1 Pkt.)*

c) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1 \} \approx S^2 \setminus \{ (x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$. *(1 Pkt.)*

d) **(L)** $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \} \approx S^1 \times S^1$, für $0 < r < R$. *(2 Pkte.)*

2. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **wegzusammenhängend**, wenn für alle $p, q \in X$ eine stetige Abb. $c\colon [0, 1] \to X$ existiert mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$. c heißt Weg von p nach q.

a) **(L)** *Zeige*: X wegzusammenhängend und $X \approx Y \Rightarrow Y$ wegzusammenhängend. *(1 Pkt.)*

b) **(L)** *Zeige*: $\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2 \} \not\approx \mathbb{R}^2$. *(3 Punkte)*

3. **a)** *Zeige*: Kompakte metrische Räume sind vollständig. *(2 Pkte.)*

b) **(L)** Es sei H der Vektorraum aller Folgen $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty$, versehen mit der Norm $\|(x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2}$.
Zeige: Die Einheitssphäre $S = \{ x \in H \mid \|x\|_2 = 1 \}$ ist abgeschlossen, beschränkt, aber nicht kompakt. (Hinweis: Betrachte die Folge der "Einheitsvektoren" $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$) *(2 Pkte.)*

4. **(L)** Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \int_0^y g(x, t)\, dt\,.$$

Zeige: Dann ist auch f wieder eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^2$. *(2 Pkte.)*

Rückgabe: Freitag, 05.06.09 in den Briefkästen