Serie 7

1. a) **(L)** (*1 Punkt*) Skizziere den Graph von $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, so daß das Unstetigkeitsverhalten bei $(0,0)$ sichtbar wird. (Nur Skizzen von Hand zulässig! Keine Computer-generierten Ausdrucke!)

b) **(L)** (*3 Punkte*) Betrachte $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 x_2}{(x_1^4 + x_2^2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\,.$$

Berechne die Grenzwerte $\lim_{t\downarrow 0} f(tz)$ für $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, und $\lim_{t\downarrow 0} f(t, t^2)$, und interpretiere die Ergebnisse geometrisch.

2. a) *2 Punkte* Untersuche folgende Funktion auf Stetigkeit in $(0,0)$,

$$f(x,y) = x^y, \quad x \geq 0\,.$$

b) *1 Punkt*: Warum ist $f(x,y) = x^y$ stetig für $x, y > 0$?

3. **(L)** Der metrische Teilraum $S^n := \{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1 \,\}$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ heißt die **n-dimensionale Sphäre** ($n \in \mathbb{N}$). Der Punkt $N = (0, \ldots, 0, 1)$ heißt der "Nordpol" von S^n. Die durch $x_{n+1} = 0$ gegebene Hyperebene des $\mathbb{R}^{n+1}$ wird im folgenden mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert, indem $(x_1, \ldots, x_n, 0) = (x_1, \ldots, x_n)$ gesetzt wird. (*je 1 Punkt pro Teilaufg.*)

a) Sei $x \in S^n \setminus \{N\}$. *Zeige*: Die Gerade durch N und x im $\mathbb{R}^{n+1}$ schneidet $\mathbb{R}^n$ in genau einem Punkt $p(x)$. Also erhält man eine Abbildung $p\colon S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$. Diese Abbildung heißt **stereographische Projektion**.

b) *Zeige*: Für $x \in S^n \setminus \{N\}$ ist

$$p(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right),$$

und folgere daraus, daß p stetig ist.

c) *Zeige*, daß p bijektiv ist, berechne $p^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$, und folgere daraus, daß auch p^{-1} stetig ist.

d) Veranschauliche p im Fall $n = 2$ durch Skizzen.

4. *Zeige (4 Punkte)*: Die Gruppe der orthogonalen $n \times n$ Matrizen

$$O(n, \mathbb{R}) = \{\, A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1} \,\}$$

ist eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des normierten Vektorraums $M(n \times n, \mathbb{R})$. (beschränkt bzgl. einer beliebigen Norm!)

Rückgabe: Freitag, 29.05.09 in den Briefkästen