# Serie 5

**1.** Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$ und definiere für $p \geq 1$

$$\|(x_n)\|_p := \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{f.a. } (x_n) \in \mathbb{R}^N,$$
$$\|(x_n)\|_\infty := \sup_{n=1,\ldots,N} |x_n| \,.$$

**a)** *(2 Punkte)* Seien $u, v > 0$ und $p, q \in [1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Zeige*:

$$u\,v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}\,.$$

(*Hinweis*: Setze $u = e^{s/p}$ und $v = e^{t/q}$ für $s, t \geq 0$ und verwende die Konvexität der Funktion $f(x) = e^x$, d.h. folgere aus $f''(x) \geq 0$, dass $tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y)$ f.a. $t \in [0, 1]$)

**b)** **(L)** *(2 Punkte)* Seien $x = (x_n) \in \mathbb{R}^N$, $y = (y_n) \in \mathbb{R}^N$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ wie in a). *Zeige*:

$$\text{für } \langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{N} x_n y_n \text{ gilt } \quad \langle x, y\rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q\,.$$

*Bem.*: Dies ist die sogenannte **Hölder-Ungleichung**.
*Hinweis*: Üblicher Trick: Ersetze $x \in \mathbb{R}^N$ durch $\frac{x}{\|x\|_p}$.

**2.** **a)** **(L)** *(2 Punkte) Zeige*: $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ f.a. $x, y \in \mathbb{R}^N$.
(*Hinweis*: Zwischenschritt z.z.: $\sum x_n(x_n + y_n)^{p-1} \leq \|x\|_p \big(\sum (x_n + y_n)^{(p-1)q}\big)^{\frac{1}{q}}$, $p, q$ wie oben)

**b)** *(2 Punkte)*: Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^\infty := \mathbb{R}^\mathbb{N}$ der Folgen reeller Zahlen. Definiere

$$l_p := \{\, (x_n) \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \text{ kv.} \,\},$$
$$\text{und} \quad l_\infty := \{\, (x_n) \in \mathbb{R}^\infty \mid (x_n) \text{ beschränkt} \,\}\,.$$

Definiere für $p \geq 1$

$$\|(x_n)\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{f.a. } (x_n) \in l_p, \quad \|(x_n)\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|\,.$$

*Zeige* $\forall p \in [1, \infty]$: $\big(l_p, \|\cdot\|_p\big)$ ist ein normierter Vektorraum.

**Bitten wenden!**

**3.** Beweise für Teilmengen $A, B \subset X$ eines metrischen Raumes (*je 1 Punkt*):

**a)** Bei äquivalenten Metriken $d_1$ und $d_2$ auf einem Raum $X$ stimmen die Teilmengen-Eigenschaften "offen" und "abgeschlossen" überein.

**b)** **(L)** $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ und $(A \cap B)^o = \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$.

**c)** **(L)** $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ und $(A \cup B)^o \supset A^o \cup B^o$. Gib jeweils ein Beispiel, welches zeigt, daß keine Gleichheit gilt.

**d)** $\partial A$ ist abgeschlossen in $X$.

**4.** Für $A \subset X =$ metrischer Raum kann man folgende Mengen bilden:

$$A, \overset{o}{A}, \overline{\overset{o}{A}}, \overset{o}{\overline{\overset{o}{A}}}, \ldots \quad \text{und} \quad \overline{A}, \overset{o}{\overline{A}}, \overline{\overset{o}{\overline{A}}}, \ldots$$

Zeige (*je 1 Punkt*):

**a)** **(L)** Es existiert ein Beispiel von $A \subset X$, so dass das obige Mengensystem aus mindestens 5 verschiedenen Mengen besteht.

**b)** Es existiert ein Beispiel von $A \subset X$, so dass das obige Mengensystem aus mindestens 7 verschiedenen Mengen besteht.

**c)** Das obige Mengensystem besteht immer aus höchstens 7 verschiedenen Mengen.

**Rückgabe:** Freitag, 15.05.09 in den Briefkästen