Serie 3

1. **a)** *Zeige*: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ für $x > 0$ und $f(0) = 0$ definiert auf $[0,1]$ ist Riemann-integrierbar. *(1 Punkt)*

b) *Beweise oder widerlege*: Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ist Riemann-integrierbar. *(2 Punkte)*

2. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $D \subset [a,b]$ die Menge der Punkte, an denen f nicht stetig ist. *Zeige*: Falls D höchstens einen Häufungspunkt hat, so ist f Riemann-integrierbar. *(4 Punkte)*

3. Es sei V der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, $V = C^0(\mathbb{R})$ und J eine Abbildung, die jedem abgeschlossenen Intervall $I = [a,b]$, $a < b$, ein lineares Funktional $J(I) \in V^*$ zuordnet (Schreibweise: $f \mapsto J(I)(f) \in \mathbb{R}$, f.a. $f \in V$) mit den folgenden Eigenschaften:

(b) *Additivität* $J([a,c])(f) = J([a,b])(f) + J([b,c])(f)$ f.a. $a < b < c$, $f \in V$,
(a) *Positivität* $J(I)(f) \geq 0$, falls $f(x) \geq 0$ f.a. $x \in I$,
(b) *Translationsinvarianz* $J(I_\lambda)(f_\lambda) = J(I, f)$ f.a. I abgeschlossenes Intervall, $f \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei $f_\lambda(x) := f(x - \lambda)$ und $[a,b]_\lambda := [a + \lambda, b + \lambda]$,
(c) *Normierung* $J([0,1])(\mathbf{1}) = 1$ für $\mathbf{1}(x) = 1$ f.a. $x \in \mathbb{R}$.

Zeige:

$$J([a,b])(f) = \int_a^b f(x)dx, \quad \text{f.a. } a < b,\ f \in C^0(\mathbb{R})\,.$$

(4 Punkte)

4. Berechne:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}$ für $x > 1$. *(1 Punkt)*

b) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x}} dx$ für $x > -1$. *(1 Punkt)*

c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$ für $x > 1$. *(1 Punkt)*

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh x}$. *(1 Punkt)*

Rückgabe: Montag, 04.05.09 in den Briefkästen