Serie 2

1. Zeige: $f(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$, ist nicht gleichmäßig stetig. *(2 Punkte)*

2. Entscheide, ob folgende Funktionen Riemann-integrierbar sind und gib im integrierbaren Fall das Integral an:

a) $f(x) = \begin{cases} 2^{-n}, & x \in (2^{-n-1}, 2^{-n}] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ für $x \in [0,1]$. *(2 Punkte)*

b) $f(x) = \begin{cases} 2nx, & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$, für $x \in [0,1]$. *(3 Punkte)*

c) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ \frac{q-2}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ p, q \in \mathbb{N}, \text{ teilerfremd} \end{cases}$ für $x \in [0,1]$. *(2 Punkte)*

3. Es sei $I = [a, b]$ und $f\colon \ \to \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion. Zeige: Dann gilt

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f \,.$$

(2 Punkte)

4. Es sei $(f, I) \mapsto J(f, I)$ eine Abbildung, die jedem Paar einer auf $\mathbb{R}$ stetigen Funktion $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und eines kompakten Intervalls $I = [a, b]$ eine reelle Zahl zuordnet, so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(a) $|I| \inf_I f \leq J(f, I) \leq |I| \sup_I f$, wobei $|I| = b - a$, *(Mittelwerteigenschaft)*

(b) $J(f, I_1 \cup I_2) = J(f, I_1) + J(f, I_2)$ für alle kompakten Intervalle $I_1 = [a, b]$, $I_2 = [b, c]$, $a < b < c$. *(Additivität)*.

Zeige: Durch diese beiden Eigenschaften ist das Riemannsche Integral eindeutig bestimmt:

$$J(f, I) = \int_a^b f(x)dx, \quad \text{f.a. } f \in C^0(\mathbb{R}),\ I = [a, b]\,.$$

(4 Punkte)

Rückgabe: Freitag, 24.04.09 in den Briefkästen