

## Serie 11

1. a) (L) Berechne für  $f(x, y) = \sin xy$  im Punkt  $(1, 0)$  die Richtungsableitung in Richtung  $v = (1/2, 1/2\sqrt{3})$  und ferner die Richtung in diesem Punkt, in der die Richtungsableitung  $\partial_v f(1, 0)$  maximal ist, sowie diesen maximalen Wert. (2 Punkte)
- b) Sei  $G \subset \mathbb{R}^3$  der Graph von  $f(x, y) = xy$  und sei  $T$  die Tangentialebene im Punkt  $(x_o, y_o, x_o y_o)$  von  $G$ . Bestimme die Ebenengleichung von  $T$  und zeige, daß  $T \cap G$  aus zwei sich schneidenden Geraden besteht. (2 Punkte)
- c) (L) Skizziere die Niveaulinien von  $f(x, y) = x^{-3}y^2$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . (1 Punkt)
2. (L) Sei auf  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  die Funktion  $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) = \frac{y}{x^2}(y - x^2)$  für  $0 < y < x^2$  und durch  $f(x, y) = y - x^2$  für  $x^2 \leq y$ . Berechne die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x}$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}$  und zeige, daß diese in  $\mathbb{R}_+^2$  stetig sind, also daß  $f$  in  $\mathbb{R}_+^2$  stetig differenzierbar ist. (3 Punkte)
3. Die Funktion  $f$  aus Aufgabe 2 wird wie folgt zu einer wieder mit  $f$  bezeichneten Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  fortgesetzt: Für  $y < 0$  sei  $f(x, y) = -f(x, -y)$  und es sei  $f(x, 0) = 0$ .
- a) (L) Begründe warum,  $f$  auch auf  $\{(x, y) \mid y < 0\}$  stetig differenzierbar ist. (1 Punkt)
- b) Zeige, daß  $f$  auch auf den Punkten der  $x$ -Achse differenzierbar ist, wobei das Differential  $Df(x_o, 0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist durch (2 Punkte)
- $$Df(x_o, 0)[(u, v)] = -v \text{ für } x_o \neq 0 \quad \text{und} \quad Df(x_o, 0)[(u, v)] = v \text{ für } x_o = 0.$$
4. Es sei  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Abbildung  $g(x, y) = (x, f(x, y))$ , wobei  $f$  die Funktion aus Aufgabe 3 ist. Zeige:
- a) (L)  $g$  ist differenzierbar. (1 Punkt)
- b) (L) Das Differential von  $g$  bei  $(0, 0)$  ist ein Isomorphismus. (1 Punkt)
- c) (L) Es gibt keine Umgebung von  $(0, 0)$ , die unter  $g$  bijektiv auf ihr Bild abgebildet wird. (1 Punkt)
- d) (L) Vergleiche dies mit dem Umkehrsatz. Welche Voraussetzung des Umkehrsatzes ist hier nicht erfüllt? (1 Punkt)

**Rückgabe:** Montag, 29.06.09 in den Briefkästen