Serie 1

1. **a)** Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_o \in (a,b)$ mit $f'(x) \geq 0$ f.a. $x \leq x_o$ und $f'(x) \leq 0$ f.a. $x \geq x_o$. *Zeige*: Dann ist $f(x_o)$ ein Maximum von f auf (a,b). *(1 Punkt)*

b) Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x_o \in (a,b)$ mit $f'(x_o) = 0$ und $f''(x_o) > 0$. *Zeige*: Dann ist $f(x_o)$ ein lokales Minimum von f. *(1 Punkt)*

c) Es sei $C = \{\, (x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R} \,\}$. Finde alle Punkte auf C, die den Abstand zum Punkt $(0,1)$ minimieren. *(3 Punkte)*

2. Es sei $f(x) = e^{-x^2}$. Beweise $f^{(2k+1)}(-x) = -f^{(2k+1)}(x)$ f.a. $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ ohne explizite Berechnung der Ableitungen. *(3 Punkte)*

3. **a)** Es sei $f(x) = \arctan(x)$. Bestimme alle Ableitungen $f^{(k)}(0)$, $k \in \mathbb{N}$. *(2 Punkte)*

b) Betrachte die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, berechne das Taylorpolynom $T_3 f(x;0)$ und eine Schranke für den Fehler $\big|f(x) - T_3 f(x;0)\big|$ in $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$. *(2 Punkte)*

4. Es sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit f zweimal differenzierbar auf $(0,\infty)$, und es existiere ein $\lambda > 0$ mit

$$f''(x) \geq \lambda^2 f(x) \quad \text{f.a. } x > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,.$$

Zeige: Dann gilt $f(x) \leq f(0)e^{-\lambda x}$ f.a. $x \geq 0$. *(3 Punkte)*
(*Hinweis*: Betrachte $\triangle(x) = f(0)e^{-\lambda x} - f(x)$, $\triangle(0)$, $\lim_{x\to\infty} \triangle(x)$ und zeige $\min \triangle \geq 0$.)

Rückgabe: Freitag, 17.04.09 in den Briefkästen