Serie 6

1. a) *(2 Pkte)* Betrachte $(\mathbb{R}^n, d)$ mit der Betragssummen-Metrik aus Serie 3, Aufg. 4a). *Zeige:* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ konvergiert in $(\mathbb{R}^n, d)$ genau dann, wenn jede der n Koordinatenfolgen $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n$ für $k \to \infty$ konvergiert.

b) *(2 Pkte)* Sei $a > 0$. Zeige: $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.
Hinweis: Fallunterscheidung, $a \lesseqgtr 1$, benutze Monotonie und betrachte Teilfolge $a^{\frac{1}{2^n}}$.

2. a) (*2 Pkte*) Gegeben $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$, zeige

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^n \right)^{\frac{1}{n}} = \max_{1\leq i\leq k} |a_i| \,.$$

b) (*2 Punkte*) Seien $p(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ und $q(x) = b_l x^l + \ldots + b_0$ komplexe Polynome vom Grad k bzw. l, d.h. $a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l \in \mathbb{C}$, mit $a_k, b_l \neq 0$. Seien $q(n) \neq 0$ f.a. $n \geq n_o$. Zeige: Die Folge $c_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ für $n \geq n_o$ konvergiert dann und nur dann, wenn $k \leq l$. Berechne im Falle der Konvergenz den Limes.

3. (*3 Pkte*) Sei (a_n) konvergent mit $a_n > 0$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ und

$$b_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} \,.$$

Zeige (b_n) ist konvergent und berechne den Grenzwert.

4. Seien $a_2 > a_1 > 0$ und $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ für $n \geq 2$ rekursiv definiert. *Zeige:*

a) (*1 Pkt*) (a_{2n}) und (a_{2n-1}) sind monotone Folgen.

b) (*1 Pkt*) (a_{2n}) und (a_{2n-1}) konvergieren gegen den gleichen Grenzwert.

c) (*2 Pkte*) $\lim a_n = \frac{2a_2 + a_1}{3}$.

Rückgabe: spätestens Dienstag, 25.11.08, 10.30 Uhr in den Briefkästen