Serie 4

1. *(3 Punkte)* Zeige durch vollst. Induktion: Es gibt $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ viele Möglichkeiten aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen. (d.h. hiermit soll die Formel für $\binom{n}{k}$ bewiesen werden.)

2. **a)** *(3 Punkte)* Es sei $x_0 > 0$ eine beliebige positive Zahl und $a > 0$ fest vorgegeben. Definiere rekursiv die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) .$$

Zeige: $x_n^2 \geq a$ f.a. $n \geq 1$, und $x_{n+1} \leq x_n$ f.a. $n \geq 1$. Berechne $x > 0$ mit $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.

b) *(2 Punkte)* Es sei $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ für $n \in \mathbb{N}$. *Zeige:* $a_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

3. *(4 Punkte)* Bestimmte von folgenden komplexen Zahlen Real- und Imaginärteil:

a) $\frac{1}{1-i}$,

b) $\frac{3+i}{5-i}$,

c) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k$, für alle $k \in \mathbb{Z}$,

d) die Lösungen von $z^2 = i$.

4. *(3 Punkte)* Zeichne die Punktmengen:

a) $M_1 = \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = |z-2| \,\}$,

b) $M_2 = \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, 2 < |z+i| < 3 \,\}$,

c) $M_3 = \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq 1,\ |\Re z| \leq 1/2,\ \Im z > 0 \,\}$.

Rückgabe: spätestens Dienstag, 11.11.08, 10.30 Uhr in den Briefkästen