Serie 10

1. Berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+a^n)x^n,\ (a \geq 0$ fest),

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(3+(-1)^n)^n x^n$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$,

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n}$.

2. **a)** *Zeigen Sie (2 Punkte)*: Ein Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ nimmt genau dann für alle $z \in \mathbb{R}$ nur reelle Werte an, wenn alle seine Koeffizienten reell sind.

b) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, daß sich jedes reelle Polynom $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ in reelle Polynome von Grad ≤ 2 faktorisieren läßt. (Sie dürfen den Fundamentalsatz der Algebra verwenden.)

3. **a)** (*1 Punkt*) Führe Division mit Rest, $f = qg + r$, durch für die Polynome $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ und $g(x) = x^2 + 8x - 3$.

b) (*2 Punkte*) Finde die Partialbruchzerlegung von

$$R(x) = \frac{-x^2 - 8x + 3}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\,.$$

c) (*3 Punkte*) Finde die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_o}$ so daß die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ positiven Konvergenzradius $r > 0$ hat und für alle $|x| < r$ gegen die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$ konvergiert. Wie lautet der Konvergenzradius?

Rückgabe: spätestens Dienstag, 06.01.09, 10.30 Uhr in den Briefkästen