Serie 1

1. Folgern Sie aus den Axiomen der reellen Zahlen (*2 Punkte*):

1. $-(x+y) = -x - y$ f.a. x, y und $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ f.a. $x, y \neq 0$.
2. $0 < x < y$ und $z < 0 \Rightarrow xz > yz$
3. $xy < 0 \Leftrightarrow \big(x < 0 \,\text{und}\, y > 0\big)$ oder $\big(x > 0 \,\text{und}\, y < 0\big)$
4. $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

2. Beweise durch vollständige Induktion (*3 Punkte*):

a) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \big(\frac{1}{2}n(n+1)\big)^2$,

b) Für alle natürlichen Zahlen n ist $3^n \geq n^3$.

3. (a) *Zeige (2 Punkte)*: Das Vollständigkeitsaxiom in 1.1.III ist äquivalent zu folgender Aussage:

Zu je zwei nichtleeren Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ mit $a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gibt es eine reelle Zahl t mit $a \leq t \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

(*Das bedeutet: Man darf im Vollständigkeitsaxiom "$a \leq b$" durch "$a < b$" ersetzen.*)

(b) *Zeige (2 Punkte)*: Es gibt Mengen A und B wie in (a), so daß keine Zahl $t \in \mathbb{R}$ existiert mit $a < t < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.
(*Das bedeutet: Man darf im Vollständigkeitsaxiom nicht "$a \leq t \leq b$" durch "$a < t < b$" ersetzen.*)

4. (*Je 2 Punkte*)

a) Die "**Dedekindsche Schnitteigenschaft**" besagt:

Sind A und B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} = A \cup B$ und $a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$, so gibt es eine reelle Zahl t mit $a \leq t \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$, und diese Zahl t ist eindeutig bestimmt.

Zeige: Vollständigkeitsaxiom $\Leftrightarrow$ Dedekindsche Schnitteigenschaft.

b) Sei A eine nichtleere Menge positiver Zahlen mit $\inf A > 0$. Sei $B = \{\, \frac{1}{a} \,|\, a \in A \,\}$.
Zeige: $\sup B = \dfrac{1}{\inf A}$.
(*Beachte:* Vergiß nicht zu zeigen, daß $\sup B$ auch existiert!)

c) Seien A und B wie in a), jedoch $\inf A = 0$. Zeige: B ist nach oben unbeschränkt.

Rückgabe: Dienstag, 21.10.08 in den Briefkästen