MUSTERLÖSUNGEN ZUR ÜBUNGSKLAUSUR

1a). Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen mit $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$, und es sei $a \leq b$ für alle $a \in A, b \in B$.

Dann gibt es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$, so dass $a \leq t \leq b$ für alle $a \in A, b \in B$.

1b). Weil $M \subseteq \mathbb{N}$ beschränkt ist und $\mathbb{N}$ unbeschränkt, existiert eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n_0$ für alle $m \in M$. Es existieren aber nur endlich viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq n_0$. Also ist M endlich und hat damit ein größtes Element.

1c). Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}$, und der Wert $\frac{1}{2}$ wird für $n = 2$ angenommen. Also ist $\sup_{n\in\mathbb{N}}(3 + \frac{(-1)^n}{n}) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, ist $\lim_{n\to\infty}(3 + \frac{(-1)^n}{n}) = 3 + 0 = 3$. Da der Grenzwert der Folge existiert, stimmt er mit dem Limes Superior überein, und es gilt also: $\limsup_{n\to\infty}(3 + \frac{(-1)^n}{n}) = 3$.

2. Beweis durch Induktion.

Induktionsanfang: Wenn $n = 1$, dann ist $10^n - 3^n = 7$.

Induktionsschritt: Nehme an, dass 7 $10^n - 3^n$ teilt, und wir müssen zeigen, dass 7 auch $10^{n+1} - 3^{n+1}$ teilt.

Die Annahme impliziert, dass es $m \in \mathbb{N}$ mit $10^n - 3^n = 7m$ gibt. Damit ist $10^n = 7m + 3^n$, und

$$\begin{aligned} 10^{n+1} - 3^{n+1} &= 10 \cdot 10^n - 3 \cdot 3^n \\ &= 10 \cdot (7m + 3^n) - 3 \cdot 3^n \\ &= 10 \cdot 7m + (10 - 3) \cdot 3^n \\ &= 10 \cdot 7m + 7 \cdot 3^n. \end{aligned}$$

Beide Terme in der letzten Zeile lassen sich durch 7 teilen, also teilt 7 ihre Summe. Somit teilt 7 auch $10^{n+1} - 3^{n+1}$.

3. Wir arbeiten mit der Eulerschen Darstellung. Schreibe $z = re^{i\phi}$, wobei r und ϕ reelle Zahlen mit $r \geq 0$ und $\phi \in [0, 2\pi]$ sind. (*Erinnerung:* hierbei ist $r = |z|$). Dann gilt

$$z^4 = -16 \Longrightarrow (re^{i\phi})^4 = -16 \Longrightarrow r^4 e^{i(4\phi)} = -16.$$

Aus $r = |z|$ erhält man $r^4 = |-16| = 16 \Longrightarrow r = 2$ (da $r \geq 0$, nehmen wir nur die positive Wurzel). Damit $r^4 e^{i(4\phi)} = -16$ ist muss $e^{i\phi} = -1$ gelten. Es gilt $e^{i(4\phi)} = \cos(4\phi) + i\sin(4\phi)$, also ist $\phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, oder $\frac{7\pi}{4}$.

Alternativer Beweis: Setze $w := z^2$. Aus $z^4 = -16$ folgt $w^2 = -16 \Longrightarrow w = \pm 4i$, also ist $z^2 = \pm 4i$. Wir müssen also die Zahlen $u \in \mathbb{C}$ mit $u^2 = i$ finden. Schreibe $u = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$u^2 = i \Longrightarrow (x^2 - y^2) + i(2xy) = i \Longrightarrow x^2 - y^2 = 0 \text{ und } 2xy = 1.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $y = \frac{1}{2x}$, und aus der ersten folgt dann

$$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \Longrightarrow x^4 - \frac{1}{4} = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

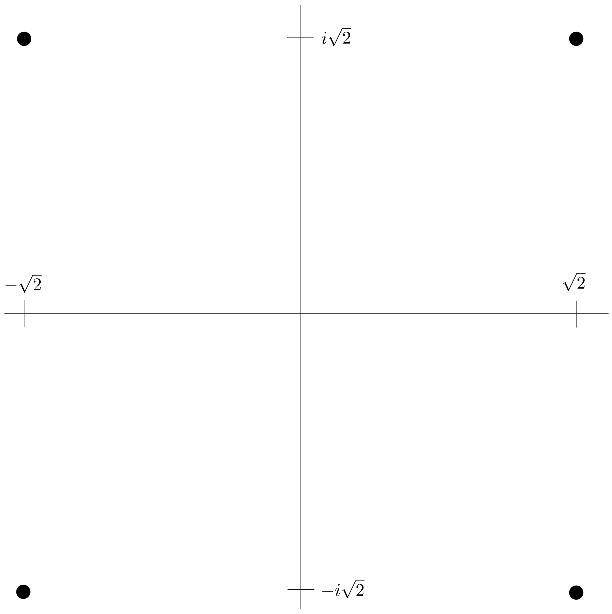
Damit ist $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Also sind die Wurzeln von i die Zahlen

$$u_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\ u_- = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Aus $z^2 = \pm 4i$ folgt also $z = \sqrt{\pm 4} \cdot \sqrt{i}$, was die Lösungen

$$z_{1,\pm} = 2 \cdot u_\pm = \pm\frac{2}{\sqrt{2}}(1+i) = \pm\sqrt{2}(1+i)$$
$$z_{2,\pm} = 2i \cdot u_\pm = \pm\frac{2i}{\sqrt{2}}(1+i) = \pm\sqrt{2}(-1+i)$$

hat.



4a). Wir betrachten erst $a_n = \frac{10^n}{n^{10}}$. Wir behaupten, dass die Folge divergiert. Wir schauen uns die Teilfolge (a_{n_k}) an, wobei $n_k := 10^k$. Für diese Teilfolge gilt

$$a_{n_k} = \frac{10^{10^k}}{(10^k)^{10}} = 10^{10^k - 10k} \xrightarrow{k\to\infty} \infty.$$

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Folge ist, dass jede Teilfolge gegen denselben Grenzwert konvergiert. Da (a_{n_k}) divergiert, kann (a_n) nicht konvergieren.

Nun betrachten wir $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}.$$

Diese Abschätzung können wir auf jeden Summand in der Definition von a_n anwenden, und wir erhalten

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1}.$$

Setze $b_n := \frac{n}{n^2+1}$. Dann ist (b_n) konvergent und $\lim b_n = 0$. Außerdem ist $0 < a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also: nach dem Sandwich-Prinzip konvergiert (a_n) und

$$0 \leq \lim a_n \leq \lim b_n = 0,$$

also gilt $\lim a_n = 0$.

4b). Sei (a_n) eine monoton steigende, beschränkte Folge. Dann ist $a := \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$ eine reelle Zahl (d.h., das Supremum ist endlich). Wir behaupten, dass (a_n) gegen a konvergiert. Da $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, reicht es zu zeigen, dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > a - \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Nach der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a - \epsilon$. Da die Folge monoton ist, gilt somit $a_n > a - \epsilon$ für alle $n \geq n_0$, und (a_n) ist somit konvergent mit Grenzwert a.

Sei nun (a_n) eine monoton fallende, beschränkte Folge. Setze $b_n := -a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (b_n) eine monotone steigende, beschränkte Folge. Nach den vorigen Argumenten ist (b_n) also konvergent, und damit ist (a_n) auch konvergent.

5a). Für die Reihe $\sum a_n = \sum \frac{1}{n!}$ wenden wir das Quotientenkriterium an:

$$\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup \frac{n!}{(n+1)!} = \limsup \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Also konvergiert die Reihe.

Für die Reihe $\sum a_n = \sum \left(\frac{1}{3+(-1)^n}\right)^n$ bemerken wir erst, dass $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $b_n := (\frac{1}{2})^n$. Da $\sum b_n$ konvergiert (dies ist eine geometrische Reihe), folgt aus dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\sum a_n$.

5b). Hier kann man das Quotientenkriterium anwenden, um die vereinfachte Version zu zeigen. Da a_n positiv ist für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Also:

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,$$

da $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also impliziert das Quotientenkriterium die Konvergenz von $\sum a_n$.

6. Die Funktion f heißt stetig in $z_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt.

7). Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Wir behaupten erst, dass es zu jedem $\delta > 0$ eine Zahl der Form $\frac{m}{2^n}$ gibt (mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), so dass $\left|x - \frac{m}{2^n}\right| < \delta$. Denn sei $n \in \mathbb{N}$ groß genug, dass $\frac{1}{2^n} < \delta$ gilt, und wähle m mit $\frac{m}{2^n} \leq x \leq \frac{m+1}{2^n}$. Aus $x \leq \frac{m+1}{2^n}$ folgt $x - \frac{m}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} < \delta$, und aus $\frac{m}{2^n} \leq x$ folgt $x - \frac{m}{2^n} \geq 0 > -\delta$. Daraus folgt die Behauptung.

Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Weil f stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - x| < \delta$ gilt: $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Nach den vorigen Argumenten finden wir m und n wie oben, so dass $\left|\frac{m}{2^n} - x\right| < \delta$. Nach der Definition von δ, und da $f(\frac{m}{2^n}) = 0$ ist, gilt

$$\left|f\left(\frac{m}{2^n}\right) - f(x)\right| < \epsilon \Longrightarrow |f(x)| < \epsilon.$$

Da wir aber ϵ beliebig klein wählen können, ist notfalls $f(x) = 0$. Da $x \in \mathbb{R}$ beliebig war, ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

8a). Für $\sum \frac{x^{2n+1}}{4^n}$ müssen wir die Reihe in die normale Form einer Potenzreihe bringen. Setze dazu $m := 2n + 1$. Damit ist $n = \frac{m-1}{2}$, und

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{4^n} = \sum \frac{x^m}{4^{\frac{m-1}{2}}}.$$

Wir berechnen nun:

$$\lim \left|\frac{4^{\frac{m-1}{2}}}{4^{\frac{m}{2}}}\right| = \lim 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

und der Konvergenzradius ist

$$R = \left(\lim \left| \frac{4^{\frac{m-1}{2}}}{4^{\frac{m}{2}}} \right| \right)^{-1} = 2.$$

8b). Für $\sum \frac{n^3 z^n}{(2n)!}$ berechnen wir:

$$\lim \left| \frac{\frac{(n+1)^3}{(2n+2)!}}{\frac{n^3}{(2n)!}} \right| = \lim \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 .$$

Der erste Bruch in der obigen Gleichung konvergiert gegen 0, und der Term in den Klammern konvergiert gegen 1, also ist der obige Grenzwert 0. Damit ist der Konvergenzradius $+\infty$.

9). Hier gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} &= \frac{1}{3^1} + 0 + 0 + \frac{1}{3^4} + 0 + 0 + \frac{1}{3^7} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{3^{3m+1}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{3^{3m}} = \frac{1}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{27^m} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{26} = \frac{9}{26}.\end{aligned}$$

Bei der zweiten Folge $(a_n) = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ haben wir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3^2} + 0 + 0 + \frac{1}{3^5} + 0 + 0 + \frac{1}{3^8} + \cdots .$$

Dies ist genau $\frac{1}{3}$ mal die ursprüngliche Reihe, also ist die Summe $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{26} = \frac{3}{26}$.

10). Leider können wir hier die Regel von L'Hôpital nicht anwenden, da es sich um komplexwertige Funktionen handelt. Aber wir können mit der Potenzreihenentwicklung von $\sin z$ arbeiten:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \cdots .$$

Also gilt

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 + \left(-\frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 - \cdots \right)$$

Diese Potenzreihe ist, wie man mit dem Quotientenkriterium nach Substitution von z^2 durch $w = z^2$ leicht sieht, wieder eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞, also insbesondere normal konvergent auf $\mathbb{C}$. Somit stellt sie eine stetige Funktion auf $\mathbb{C}$ dar mit Funktionswert 1 in $z = 0$, wie man durch Einsetzen von $z = 0$ in die Reihe sieht.

Die stetige Fortsetzung von $\frac{\sin z}{z}$ auf $\mathbb{C}$ ist also

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$