Serie 5 Aufg. 2 Musterlösung

Mit $z = z_1 + i z_2$, $b = b_1 + i b_2$ $\quad z_1, z_2, b_1, b_2 \in R$ gilt:

$$a(z_1^2 + z_2^2) + (b_1 - i b_2)(z_1 + i z_2) + (b_1 + i b_2)(z_1 - i z_2) + c = 0$$

Betrachte den Imaginärteil:

$$b_1 z_2 - b_2 z_1 + b_2 z_1 + - b_1 z_2 = 0$$

→ Immer erfüllt. Keine Einschränkungen!

Betrachte den Realteil:

$$a z_1^2 + a z_2^2 + z_1(b_1 + b_1) + z_2(b_2 + b_2) + c = 0$$

→ Fall 1: $a = 0$: $\quad 2b_1 z_1 + 2b_2 z_2 + c = 0$

Dies ist eine Gerade (allg. Gleichung: $Ax + By + C = 0$)

→ Fall 2: $a \neq 0$: Division durch a liefert:

$$z_1^2 + \frac{2b_1}{a} z_1 + z_2^2 + \frac{2b_2}{a} z_2 + \frac{c}{a} = 0$$

quadr. Ergänz: $\left(z_1^2 + 2\frac{b_1}{a} z_1 + \left(\frac{b_1}{a}\right)^2\right) - \left(\frac{b_1}{a}\right)^2 + \left(z_2^2 + 2\frac{b_2}{a} + \left(\frac{b_2}{a}\right)^2\right) - \left(\frac{b_2}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$

$$(z_1 + b_1/a)^2 + (z_2 + b_2/a)^2 = \underbrace{a^2}_{>0} \underbrace{(b_1^2 + b_2^2 - ca)}_{>0 \text{ nach Vor: } |b|^2 - ac > 0}$$

Dies ist eine Kreisgleichung ($x^2 + y^2 = r^2$) für einen Kreis mit Mittelpunkt $(-b_1/a, -b_2/a)$

Damit ist also die Lösungsmenge der Gleichung entweder eine Gerade oder ein Kreis.