Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Partielle Differentialgleichungen I — Einführung

I.1 Klassifikation Partieller Differentialgleichungen (PDGl)

I.1.1 Einführung

Es gibt keine allgemeine Theorie zur Lösbarkeit aller partieller Differentialgleichungen. Eine solche Theorie wird auch kaum jemals existieren aufgrund der riesigen Vielfalt an physikalischen, geometrischen, wahrscheinlichkeitstheoretischen Phänomenen, die durch PDGl modelliert werden. Daher konzentriert man sich auf das Studium von *speziellen* PDGl, welche reichhaltige Anwendungen in Mathematik und Physik haben.

Definition I.1 Eine *Partielle Differentialgleichung* (abgekürzt als PDGl) ist eine Gleichung der Form

$$F(x,y,\dots,u,u_x,u_y,\dots,u_{xx},u_{xy},\dots)=0, \tag{I.1}$$

wobei F eine gegebene Funktion der unabhängigen Variablen $x,y,\dots,$ der unbekannten Funktion u und einer endlichen Zahl von partiellen Ableitungen von u ist.
Wir nennen u eine *Lösung* von (I.1), falls nach Einsetzen von $u(x,y,\dots)$ und ihren partiellen Ableitungen die Gleichung (I.1) identisch erfüllt ist in einem gewissen Gebiet Ω des Raumes der unabhängigen Variablen $x,y,\dots$.
Die *Ordnung* der PDGl ist die Ordnung der höchsten Ableitung von u, die in F auftritt.

Eine PDGl heißt *linear*, falls sie linear in der unbekannten Funktion u ist und deren partiellen Ableitungen u_x, u_y, u_{xy}, …, Die Koeffizienten dürfen höchstens von den Variablen $x,y,\dots$ abhängen. M. a. W., eine lineare PDGl hat die Form

$$G(u,u_x,u_y,\dots,u_{xx},u_{xy},\dots)=f(x,y,\dots), \tag{I.2}$$

mit einer Funktion f rechts, die nur von den Variablen $x,y,\dots$ abhängt und einer Funktion G, die linear ist in allen Komponenten mit Koeffizienten, die nur von $x,y,\dots$ abhängen.

Genauer gesagt, der *Differentialoperator* $L(u) = G(u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots)$, der jeder Funktion $u(x, y, \ldots)$ eine neue Funktion $L[u](x, y, \ldots)$ zuordnet ist linear von $\mathrm{C}^k(\Omega) \to \mathrm{C}^{k-1}(\Omega)$. Dabei sei k die Ordnung der PDGl.
Die lineare PDGl (I.2) ($L(u) = f$) heißt *homogen*, falls $f = 0$ und *inhomogen* sonst. Zum Beispiel ist $\cos(xy^2)u_{xxy} - y^2 u_x + u \sin x + \tan(x^2 + y^2) = 0$ eine lineare inhomogene PDGl dritter Ordnung; die zugehörige homogene lineare PDGl lautet $\cos(xy^2)u_{xxy} - y^2 u_x + u \sin x = 0$.
Eine PDGl heißt *quasilinear*, falls sie linear in allen höchsten partiellen Ableitungen der Ordnung m ist (m sein die Ordnung) mit Koeffizientenfunktionen, die nur von $x, y, \ldots$ abhängen *und* möglicherweise von partiellen Ableitungen von u, deren Ordnung kleiner als m ist.
So ist z. B. $u_x u_{xx} + u^2 = 0$ quasilinear, $u_{xy} u_{xx} + 1 = 0$ jedoch nicht.
Eine quasilineare Gleichung heißt *semilinear*, falls die Koeffizienten vor den Ableitungen höchster Ordnung nur Funktionen in den unabhängigen Variablen $x, y, \ldots$ sind So ist etwa $\sin x\, u_{xx} + u^2 = 0$ semilinear; $u_x u_{xx} + u^2 = 0$ jedoch nicht.
Mitunter betrachtet man auch *Systeme* von PDGln, in denen eine oder mehrere unbekannte Funktionen sowie deren partielle Ableitungen auftreten.

I.1.2 Beispiele

(1) Die **Laplacegleichung** in n Dimensionen ist eine lineare, homogene PDGl zweiter Ordnung

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = 0$$

für eine Funktion $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ Ihre Lösungen u heißen *harmonische* Funktionen. Im Falle $n = 2$ ordnen wir jeder harmonischen Funktion $u(x, y)$ ihre „konjugierte" harmonische Funktion $v(x, y)$ zu. Diese ist durch das partielle Differentialgleichungssystem erster Ordnung den so genannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

eindeutig bestimmt. Jedes Lösungspaar reeller Funktionen (u, v) liefert eine analytische (holomorphe, komplex-differenzierbare) Funktion $f(z) = u + \mathrm{i}v$.

Die Laplace-Gleichung ist die homogene Form der **Poissongleichung**

$$\Delta u = f, \quad \text{für eine gegebene Funktion} \quad f\colon \Omega \to \mathbb{R}.$$

Während die Laplace-Gleichung Gleichgewichtszustände beschreibt, ist die Poisson-Gleichung in der Elektrostatik von Bedeutung. Laplace- und Poisson-Gleichungen beschreiben beide *stationäre* Prozesse, also Phänomene, die nicht von der Zeit abhängen.

(2) Die **Wärmeleitungsgleichung.** Bei dieser Gleichung ist eine Variable, t, als Zeitkoordinate ausgezeichnet. während die anderen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ die Ortskoordinaten repräsentieren. Es sei

$$u\colon \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \Omega \text{ offen im } \mathbb{R}^n,$$

wobei $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ die positive Zeitachse beschreibt. Die Wärmeleitungsgleichung lautet

$$k u_t = \Delta u, \quad \text{where} \quad \Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}.$$

Sie modelliert Wärmeleitungsprozesse und Diffusionsprozesse.

(3) Die **Wellengleichung.** Mit den selben Bezeichnungen wie in (2) ist die Wellengleichung

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0.$$

Sie modelliert Wellen und andere Schwingungsprozesse.

(4) Die **Korteweg-de-Vries-Gleichung:**

$$u_t - 6u\, u_x + u_{xxx} = 0;$$

sie modelliert die Wellenausbreitung in flachem Wasser.

(5) Mit der **Monge-Ampère-Gleichung**

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = f$$

bestimmt man Flächen mit vorgegebener Krümmung f.

(6) Die **Maxwellchen Gleichungen** für die elektrische Feldstärke $E = (E_1, E_2, E_3)$ und die magnetische Feldstärke $B = (B_1, B_2, B_3)$ als Funktionen von (t, x_1, x_2, x_3) lauten:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} B &= 0, && \text{(magnetostatisches Gesetz)},\\
B_t + \operatorname{rot} E &= 0, && \text{(magnetodynamisches Gesetz)},\\
\operatorname{div} E &= 4\pi\rho, && \text{(elektrostatisches Gesetz mit Ladungsdichte } \rho\text{)},\\
E_t - \operatorname{rot} B &= -4\pi j && \text{(elektrodynamisches Gesetz mit Stromdichte } j\text{)}
\end{aligned}$$

(7) Die **Navier-Stokes-Gleichungen** sind die Grundgleichungen der Strömungsmechanik. Es sei $v(x,t) = (v^1, v^2, v^3)$ die Geschwindigkeit und $p(x,t)$ der Druck einer inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte ρ und Viskosität η:

$$\begin{gathered}
\rho v_t^j + \rho \sum_{i=1}^{3} v^i v_{x_i}^j - \eta \Delta v^j = -p_{x_j}, \quad j = 1,2,3,\\
\operatorname{div} v = 0.
\end{gathered}$$

(8) Die **Schrödinger-Gleichung**

$$\mathrm{i}\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + V(x,u),$$

wobei m die Masse, V ein Potential, $u : \Omega \to \mathbb{C}$ die gesuchte Funktion sind. Formal ist die Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik ähnlich der Wärmeleitungsgleichung, insbesondere, wenn $V = 0$. Die imaginäre Einheit i als Faktor führt aber zu bedeutenden Unterschieden.

Klassifikation

Wir haben oben sehr viele verschieden Typen von PDGl aufgeschrieben. Es ist hoffnungslos, *eine* Theorie entwickeln zu wollen, die alle diese Gleichungen simultan behandelt.
Wir wollen uns daher Kriterien überlegen, wie man diese mannigfachen Differentialgleichungen in Klassen einteilen könnte. Hier sind verschieden Möglichkeiten, dies zu tun.

(I) *Algebraisch.*

(a) Lineare PDGl sind (1), (2), (3), (6) (erster Ordnung) und (8)

(b) Semilineare Gleichungen sind (4) und (7)

(c) Eine nicht-lineare Gleichung ist (5)

Üblicherweise sind linearer Gleichungen einfacher zu behandeln als nicht-lineare Gleichungen. Wir beschränken uns daher im wesentlichen auf lineare PDGl.

(II) Die *Ordnung* der Gleichung. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und die Maxwell-Gleichungen sind Systeme von PDGl erster Ordnung. Hingegen sind (1), (2), (3), (5), (7), (8) zweiter Ordnung; (4) ist von dritter Ordnung. Gleichungen höherer als dritter Ordnung treten seltener auf; die wichtigsten sind die Gleichungen zweiter Ordnung.

(III) *Elliptisch, parabolisch und hyperbolisch* Wir werden später zumindest die semilinearen PDGl zweiter Ordnung in diese drei Klassen einordnen. Prinzipiell sind alle PDGl zweiter Ordnung in zwei Variablen x, y lokal in diese drei Klassen einzuordnen.

(IV) Entsprechend ihrer *Lösbarkeit*. Wir betrachten die PDGl zweiter Ordnung $F(x, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) = 0$ mit $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, und wollen zusätzliche Annahmen über u machen, welche typischer Weise vorgegebene Randwerte von u bzw. von seinen partiellen Ableitungen sind.

Idealer Weise erfüllt ein solches Problem, die folgenden drei Bedingungen und wurde nach Hadamard als *korrekt gestelltes Problem* bezeichnet:

(a) Es existiert eine Lösung u.

(b) Die Lösung ist eindeutig.

(c) Die Lösung ist *stabil.* Das heißt, ändern sich die gegebenen Anfangsbedingungen stetig (Randwerte, Koeffizienten in der Gleichung, rechte Seite der Gleichung), dann ändert sich die Lösung ebenfalls stetig.

Beispiel I.1 (Zurückführen auf GDGl.) In den folgenden Beispielen sei $\Omega = \mathbb{R}^2$ und $u = u(x, y)$.
(a) Man ermittle alle Funktionen $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit $u_{xx} = 0$. *Lösung.* Zunächst integrieren wir diese Gleichung bezüglich x und erhalten, dass u_x bezüglich x konstant ist. Da über y gar keine Aussage gemacht ist, erhalten wir $u_x = a(y)$. Erneute Integration bzgl. x liefert, dass

u linear in x ist, $u(x,y) = xa(y) + b(y)$ mit beliebigen Funktionen $a = a(y)$ und $b = b(y)$. Man beachte, dass die gewöhnliche DGl $u'' = 0$ die allgemeine Lösung $u(x) = ax + b$ mit konstanten Koeffizienten a, b hat. Nun sind die Koeffizienten jedoch *Funktionen* in y.
(b) Man löse $u_{xx} + u = 0$, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Die Lösung der zugehörigen gew. DGl $u'' + u = 0$, $u = u(x)$, $u \in C^2(\mathbb{R})$, lautet $u(x) = a\cos x + b\sin x$, so dass die allgemeine Lösung der obigen PDGl in zwei Variablen x und y gleich $u(x,y) = a(y)\cos x + b(y)\sin x$ ist, wobei a und b beliebige Funktionen sind.
(c) Man löse $u_{xy} = 0$, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Man beachte, dass $u_{xy} = (u_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,y)\right)$. Zunächst integriert man die Gleichung $\frac{\partial}{\partial y}(u_x) = 0$ bezüglich y und erhält $u_x = \tilde{f}(x)$. Integration bezüglich x führt dann auf $u = \int \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x + g(y) = f(x) + g(y)$, wobei f differenzierbar ist und g beliebig.

I.2 PDGl erster Ordnung — Die Methode der Charakteristiken

Wir lösen eine PDGl 1. Ordnung durch die Methode der *Charakteristiken*. Sie ist anwendbar auf beliebige quasi-lineare Gleichungen

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \tag{I.3}$$

insbesondere auf lineare Gleichungen

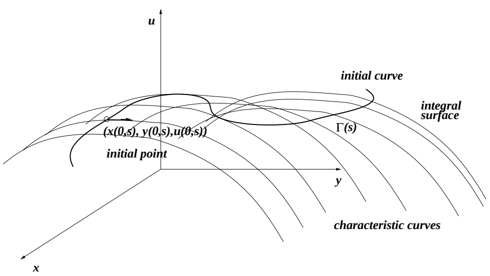
$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c_0(x,y)u + c_1(x,y). \tag{I.4}$$

Wir beschränken uns allerdings auf die lineare Gleichung zusammen mit einer *Anfangsbedingung*, welche als Kurve im xyu-Raum gegeben ist

$$\Gamma = \Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s)), \quad s \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}. \tag{I.5}$$

Die Kurve Γ heißt *Anfangskurve*. Die *Anfangsbedingungen* lauten dann

$$u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s), \quad s \in (a,b).$$



Die geometrische Idee dieser Methode ist folgende. Die Lösung $u = u(x,y)$ kann als zweidimensionale Fläche im $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,u) \mid x,y,u \in \mathbb{R}^3\}$ aufgefasst werden. Ausgehend von einem Punkt der Anfangskurve konstruieren wir eine *charakteristische Kurve* in der Fläche u. Wenn wir dies für alle Punkte der Anfangskurve gemacht haben, erhalten wir eine einparametrige Schar von charakteristischen Kurven, die „zusammengeklebt“ die Fläche u ergeben.

Die lineare Gleichung (I.4) kann auch geschrieben werden als

$$(a,b,c_0\,u+c_1)\cdot(u_x,u_y,-1)=0. \tag{I.6}$$

Zur Erinnerung: $(u_x,u_y,-1)$ ist der Normalenvektor an die Fläche $(x,y,u(x,y))$. Also lautet die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkte (x_0,y_0,u_0)

$$u-u_0=u_x(x-x_0)+u_y(y-y_0)\Leftrightarrow(x-x_0,y-y_0,u-u_0)\cdot(u_x,u_y,-1)=0.$$

Benutzt man nun die lineare PDGl (I.6), so erkennt man, dass $(a,b,c_0\,u+c_1)$ ein Vektor der Tangentialebene ist Eine Kurve $(x(t),y(t),u(t))$ mit genau diesen Tangentialvektoren

$$(x'(t),y'(t),u'(t))=(a(x(t),y(t)),b(x(t),y(t)),c_0(x(t),y(t))u(t)+c_1(x(t),y(t)))$$

zu finden ist äquivalent zum Lösen der gewöhnlichen DGLn

$$x'(t)=a(x(t),y(t)), \tag{I.7}$$

$$y'(t)=b(x(t),y(t)), \tag{I.8}$$

$$u'(t)=c_0(x(t),y(t))u(t)+c_1(x(t),y(t))). \tag{I.9}$$

Diese Gleichungen sind die *charakteristischen Gleichungen* von (I.6) . Ihre Lösungen sind die *charakteristischen Kurven* der partiellen DGl. Man beachte, dass das obige System autonom ist — es gibt keine explizite Abhängigkeit von t.

Um die charakteristischen Kurven zu bestimmen, braucht man Anfangsbedingungen. Wir fordern daher, dass die Anfangspunkte der charakteristischen Kurven auf der Anfangskurve $\Gamma(s)$ liegen sollen. Da jede Kurve $(x(t),y(t),u(t))$ von einem anderen Anfangspunkt $\Gamma(s)$ heraus sich entwickelt, können wir die Kurven auch explizit in der Form $(x(t,s),y(t,s),u(t,s))$ schreiben. Die Anfangsbedingungen lauten dann

$$x(0,s)=x_0(s),\quad y(0,s)=y_0(s),\quad u(0,s)=u_0(s).$$

Man beachte, dass wir den Parameter t so gewählt haben, dass die Punkte der charakteristischen Kurven zum Zeitpunkt $t=0$ auf der Anfangskurve liegen. Man beachte außerdem, dass durch die Parametrisierung $(x(t,s),y(t,s),u(t,s))$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ dargestellt wird.

Die Methode der Charakteristiken ist auch auf semi-lineare Gleichungen anwendbar.

Fazit: Im ersten Schritt zeichnen wir eine Anfangskurve $\Gamma(s)$ aus. Im zweiten Schritt wählen wir einen variablen Punkt s auf Γ als Anfangspunkt und lösen das Anfangswertproblem zum System von charakteristischen Gleichungen.

Haben wir dies für alle Punkte der Anfangskurve getan, erhalten wir den Ausschnitt aus einer Fläche, die so genannte *Integralfläche*. Sie ist die Vereinigung der charakteristischen Kurven.

Beispiel I.2 1. Man löse die PDGL

$$u_x+u_y=2$$

bezüglich der Anfangsbedingung $u(x,0)=x^2$. Die charakteristischen Gleichungen und die parametrische Form der Anfangskurve lauten

$$\begin{aligned} x_t(t,s)&=1, & y_t(t,s)&=1, & u_t(t,s)&=2,\\ x(0,s)&=s, & y(0,s)&=0, & u(0,s)&=s^2. \end{aligned}$$

Die charakteristischen Gleichungen sind leicht gelöst:

$$x(t,s) = t + f_1(s), \qquad y(t,s) = t + f_2(s), \qquad u(t,s) = 2t + f_3(s).$$

Setzt man noch die Anfangsbedingungen ein, so hat man

$$x(t,s) = t + s, \qquad y(t,s) = t, \qquad u(t,s) = 2t + s^2.$$

Dies ist die parametrische Form der Integralfläche. Um eine explizite Form zu erhalten, müssen wir die obigen Gleichungen $(x(t,s), y(t,s))$ nach s und t auflösen. Das heißt, wir müssen $(t(x,y), s(x,y))$ ermitteln. Im obigen Beispiel wäre das $t = y$, $s = x - y$. Somit lautet die explizite Gleichung der Integralfläche

$$u(x,y) = 2y + (x-y)^2.$$

Bemerkung I.1 (a) Diese einfachen Beispiele könnten suggerieren, dass jedes Anfangswertproblem zu einer PDGl erster Ordnung eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Dies ist nicht der Fall. Ist das Anfangswertproblem (I.3) zusammen mit den Anfangsbedingungen (I.5) ein korrekt gestelltes Problem? Unter welchen Bedingungen existiert eine eindeutig bestimmte Integralfläche zu einer gegebenen Anfangskurve?
(b) Beachten Sie, dass selbst im Falle einer *linearen* PDGl erster Ordnung das charakteristische System nicht-linear ist. Nach der Theorie der gew. DGl kann man daher höchstens *lokal* die Existenz einer Lösung garantieren.
(c) Die Auflösung der parametrischen Darstellung der Integralfläche $(x(s,t), y(s,t), u(s,t))$ könnte weitere Probleme mit sich bringen. Zur Erinnerung: Der Satz über die Umkehrabbildung garantiert die lokale Existenz der inversen Abbildung einer differenzierbaren Funktion, wenn an dieser stelle die Funktionaldeterminante (Jacobian) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}$ ungleich 0 ist.
Die explizite Berechnung der Jacobi-Matrix am Punkt s der Anfangskurve liefert

$$J = \begin{vmatrix} x_t(0,s) & x_s(0,s) \\ y_t(0,s) & y_s(0,s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'(t) & x_0'(s) \\ y'(t) & y_0'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x_0'(s) \\ b & y_0'(s) \end{vmatrix}.$$

Folglich ist die Matrix singulär, genau dann, wenn die Tangentialvektoren (a,b) an die charakteristische Kurve und $(x_0'(s), y_0'(s))$ an die Anfangskurve linear abhängig sind. Die geometrische Bedeutung von $J = 0$ ist, dass die Projektion der Anfangskurve $\Gamma(s)$ in die xy-Ebene tangential ist zur Projektion einer charakteristischen Kurve (Berührung liegt vor).
Um die Eindeutigkeit der Lösung nahe der Anfangskurve zu garantieren, muss also gelten $J \neq 0$. Diese Bedingung heißt *Transversalität* — die Anfangskurve muss in allen Punkten quer zu den charakteristischen Linien verlaufen.

Beispiel I.3 (Korrekt und nicht-korrekt gestellte Probleme) (a) Man löse $u_x = 1$ bezüglich der Anfangsbedingung $u(0,y) = g(y)$. Die charakteristischen Gleichungen und Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} &x_t(t,s) = 1, \qquad && y_t(t,s) = 0, \qquad && u_t(t,s) = 1, \\ &x(0,s) = 0, && y(0,s) = s, && u(0,s) = g(s). \end{aligned}$$

Die parametrische Form der Integralfläche ist $(x(t,s), y(t,s), u(t,s)) = (t, s, t + g(s))$ so dass die explizite Lösung lautet $u(x,y) = x + g(y)$.
(b) Wir betrachten die selbe Gleichung $u_x = 1$, verändern aber die Anfangsbedingungen: $u(x,0) = h(x)$. In diesem Fall wandelt sich das Bild drastisch.

$$\begin{aligned} x_t(t,s) &= 1, & y_t(t,s) &= 0, & u_t(t,s) &= 1, \\ x(0,s) &= s, & y(0,s) &= 0, & u(0,s) &= h(s). \end{aligned}$$

Die parametrische Lösung lautet

$$(x(t,s), y(t,s), u(t,s)) = (t + s, 0, t + h(s)).$$

Die Gleichungen $x = t + s$, $y = 0$ können nicht nach s und t aufgelöst werden.
Geometrisch: Die Gleichungen der Charakteristiken sind $x'(t) = 1$, $y'(t) = 0$, also $(x(t), y(t)) = (t, c)$, was die Parallelen Geraden zur x-Achse sind; $y = \text{const.}$. Die Anfangskurve ist die x-Achse, $y = 0$, also eine spezielle Charakteristik. Auch analytisch ist klar, dass die die Transversalität auf der gesamten Anfangskurve verletzt ist, denn

$$J = \begin{vmatrix} a & x_0'(s) \\ b & y_0'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Im Spezialfall $h(x) = x + c$ mit einer Konstanten c, erhalten wir $u(t,s) = t + s + c$. In diesem Fall ist es nicht nötig, nach s und t aufzulösen, da wir die explizite Lösung ablesen können: $u(x,y) = x + c + f(y)$ für jede differenzierbare Funktion f mit $f(0) = 0$. In diesem Fall haben wir also unendlich viele Lösungen und somit keine Eindeutigkeit.
(c) Für jede andere Wahl von h haben wir jedoch gar keine Lösung des Problems — die Existenzbedingung ist verletzt.

Bemerkung I.2 (a) Wegen der besonderen Rolle, die die Projektionen der charakteristischen Kurven spielen, bezeichnet man sie auch als *Charakteristiken.* Im Falle einer linearen PDGl erster Ordnung (I.4) lautet das System der gew. DGl der (Projektionen) der Charakteristiken:

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(x(t), y(t)), \quad y'(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = b(x(t), y(t)), \tag{I.10}$$

und dieses führt auf $y'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{b(x,y)}{a(x,y)}$.
(b) Die Methode der Charakteristiken ist, in etwas abgewandelter Form, für die allgemeine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in zwei Variablen anwendbar:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Sie führt auf ein gew. DGLsystem von fünf Gleichungen, für jede Variable von F eine Gleichung, siehe [PR05, 2.9, Seite 52 ff.] oder [Joh82, 1.7, S. 19 ff.].

I.3 Klassifikation von semilinearen PDGln zweiter Ordnung

I.3.1 Quadratische Formen – Wiederholung

Wir wiederholen die wichtigsten Fakten über quadratische Formen aus der linearen Algebra.
Sylvestersches Trägheitsgesetz Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix.
(a) Dann existiert eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sowie $r, s, t \in \mathbb{N}_0$ mit $r+s+t=n$ und eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{r+s}, 0, \dots, 0)$ mit $d_i > 0$ für $i = 1, \dots, r$ und $d_i < 0$ für $i = r+1, \dots, r+s$ und

$$BAB^\top = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_{r+s}, 0, \dots, 0).$$

Wir nennen $r+$ den *Rang* von A und $r-s$ die *Signatur von* A.
(b) Rang und Signatur hängen nicht von der Wahl von B ab, das heißt, wenn für eine andere reguläre Matrix B' und eine andere Diagonalmatrix D' gilt $D' = B'A(B')^\top$, so stimmen Rang und Signatur von D und D' überein.
Wir assoziieren zu A eine quadratische Form $Q_A(h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, über

$$Q_A(h) = h^\top \cdot A \cdot h = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i h_j.$$

Wir nennen Q_A bzw. A

positiv definit,	falls	$\forall\, h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0 \colon Q_A(h) > 0.$
negativ definit,	falls	$\forall\, h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0 \colon Q_A(h) < 0.$
positiv semidefinit,	falls	$\forall\, h \in \mathbb{R}^n \colon Q_A(h) \geq 0.$
negativ semidefinit,	falls	$\forall\, h \in \mathbb{R}^n \colon Q_A(h) \leq 0.$
indefinit,	falls	$\exists\, h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n \colon Q_A(h_1) < 0 < Q_A(h_2).$

Zur Erinnerung, Q_A ist positiv (negativ) definit, falls alle Eigenwerte von A positiv (negativ) sind. Q_A ist semidefinit, falls einige Eigenwerte gleich Null sind, alle anderen Eigenwerte aber dasselbe Vorzeichen haben. Q_A ist indefinit, falls A sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt.

I.3.2 Elliptisch, Parabolisch, Hyperbolisch

Wir betrachten die semilineare Gleichung zweiter Ordnung in n Variablen $x_1, \dots, x_n$ in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0; \tag{I.11}$$

die Koeffizienten $a_{ij}(x)$ seien stetige Funktionen. Da wir $u \in C^2(\Omega)$ annehmen, gilt Schwarz' Lemma und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Koeffizientenmatrix $A(x)$ als symmetrisch annehmen: $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$.

Definition I.2 Wir nennen die PDGl (I.11) im Punkte x_0

elliptisch , falls die Matrix $A(x_0)$ positiv oder negativ definit ist,
parabolisch, falls $A(x_0)$ positiv oder negativ semidefinit ist und den Rang $n-1$ hat (Null ist Eigenwert von $A(x_0)$ der Vielfachheit 1),
hyperbolisch, falls $A(x_0)$ indefinit ist mit Rang n und einer Signatur vom Betrag gleich $n-2$. Das heißt, die Matrix hat $n-1$ positive und einen negativen Eigenwert (oder umgekehrt).

Bemerkungen I.1 (a) Der Typ der Gleichung ändert sich nicht, wenn man (I.11) mit -1 multipliziert. Aus einer positiv definiten Matrix A wird eine negativ definite Matrix $-A$. Die Lösung u ändert sich nicht.
(b) Der Typ einer PDGl kann durchaus von der Stelle $x_0 \in \Omega$ abhängen und braucht nicht konstant zu sein. In diesem Fall spricht man vom *gemischten Typ*.

I.3.3 Koordinatentransformationen

Wir untersuchen, wie sich die Koeffizienten $a_{ij}(x)$ verändern, wenn wir eine reguläre Variablentransformation $y=\varphi(x)$ durchführen;

$$y_l = \varphi_l(x_1,\dots,x_n), \quad l=1,\dots,n;$$

Die Transformation heißt *regulär*, falls die Funktionaldeterminante (Jacobische, Determinante der Jacobi-Matrix) $\frac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x_0) \neq 0$ für alle $x_0 \in \Omega$.
Nach dem Satz über die Inverse Abbildung, kann man die Transformation dann lokal invertieren; die inverse Abbildung sei $x=\psi(y)$

$$x_l = \psi_l(y_1,\dots,y_n), \quad l=1,\dots,n.$$

Setzt man

$$\tilde{u}(y) := u(\psi(y)), \quad \text{dann} \quad u(x) = \tilde{u}(\varphi(x))$$

und fordert $\varphi_l \in C^2(\Omega)$, so hat man nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= \sum_{l=1}^n \tilde{u}_{y_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}, \\ u_{x_i x_j} &= (u_{x_i})_{x_j} = \sum_{k,l=1}^n \tilde{u}_{y_l y_k} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \tilde{u}_{y_l} \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned} \tag{I.12}$$

Setzt man (I.12) in (I.11) ein, so erhält man

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{u}_{y_l y_k} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \tilde{u}_{y_l} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_i \partial x_j} + \tilde{F}(y, \tilde{u}, \tilde{u}_{y_1}, \dots, \tilde{u}_{y_n}) = 0. \tag{I.13}$$

Wir bezeichnen die Koeffizienten vor den zweiten partiellen Ableitungen von $\tilde{u}$, der transformierten Gleichung mit $\tilde{a}_{lk}$,

$$\tilde{a}_{lk} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}, \tag{I.14}$$

und schreiben (I.13) in der selben Form wie (I.11)

$$\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{lk}(y)\tilde{u}_{y_l y_k} + \tilde{F}(y, \tilde{u}, \tilde{u}_{y_1}, \dots, \tilde{u}_{y_n}) = 0.$$

Gleichung (I.14) spielt später eine entscheidende Rolle um die PDGl (I.11) zu vereinfachen. Und zwar wollen wir, dass einige der Koeffizienten $\tilde{a}_{lk}$ zu 0 werden. Schreibt man

$$b_{lj} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}, \quad l, j = 1, \dots, n, \quad B = (b_{lj}),$$

das heißt, B ist die Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation, so lauten die neuen Koeffizienten $\tilde{A}(y) = (\tilde{a}_{lk}(y))$ wie folgt:

$$\tilde{A} = B \cdot A \cdot B^{\top}.$$

Dies ist aber genau die Transformationsformel für quadratische Formen. Nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz, Satz I.3.1 haben A und $\tilde{A}$ die selbe Signatur und den selben Rang. Wir haben also den folgenden Satz gezeigt:

Satz I.1 *Der Typ einer semilinearen PDGl zweiter Ordnung ändert sich bei einer regulären Koordinatentransformation nicht.*

Notation. Es sei L ein Differentialoperator der Form

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

dann bezeichnen wir mit L_2

$$L_2[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j}$$

die Summe der Terme mit den höchsten partiellen Ableitungen. L_2 ist ein linearer Operator.

Definition I.3 (a) Die PDGl $L[u] = 0$ ist in *Normalform*, falls

$$L_2[u] = \sum_{j=1}^{r} u_{x_j x_j} - \sum_{j=r+1}^{r+s} u_{x_j x_j}$$

mit gewissen natürlichen Zahlen r, s mit $r + s \leq n$.
(b) Es sei $n = 2$. Eine hyperbolische Gleichung $L[\tilde{u}] = 0$ ist in *kanonischer* Form, wenn nach Koordinatentransformation $u(x, y) = \tilde{u}(\xi, \eta)$

$$L_2[\tilde{u}] = \tilde{u}_{\xi\eta}.$$

Bemerkungen I.2 (a) Der Typ der Gleichung kann vom betrachteten Punkt $x_0 \in \Omega$ abhängen. Zum Beispiel ist die *Trichomi-Gleichung*

$$y\, u_{xx} + u_{yy} = 0$$

von *gemischtem Typ*. Genauer gesagt ist sie elliptisch für $y > 0$, parabolisch für $y = 0$ und hyperbolisch für $y < 0$.
(b) Die Laplace-Gleichung ist elliptisch, die Wärmeleitungsgleichung ist parabolisch während die Wellengleichung hyperbolisch ist.
(c) Diese Klassifikation ist nicht komplett, da etwa für $n \geq 3$ Matrizen mit genau einem positiven, genau einem negativen und genau einem Eigenwert gleich 0 nicht erfasst sind; für $n = 2$ ist die Klassifikation vollständig.
(d) Der Fall $n = 2$. Die PDGl

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

mit Koeffizienten $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$ und $c = c(x, y)$ ist genau dann elliptisch, parabolisch, bzw. hyperbolisch bei (x_0, y_0), wenn $ac - b^2 > 0$, $ac - b^2 = 0$ bzw. $ac - b^2 < 0$ bei (x_0, y_0).

I.3.4 Charakteristiken

Gegeben sei die semilineare PDGl zweiter Ordnung in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0 \tag{I.15}$$

mit stetigen Koeffizienten a_{ij}; $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$. Analog zur Gleichung 1. Ordnung definieren wir die Charakteristiken.

Definition I.4 Es sei $\sigma \in C^1(\Omega)$, $c \in \mathbb{R}$ fixiert. Die Hyperfläche $\mathscr{F} = \{x \in \Omega \mid \sigma(x) = c\}$ mit $\operatorname{grad} \sigma(x_0) \neq 0$ für alle $x_0 \in \mathscr{F}$ (reguläre Fläche) heißt *charakteristische Hyperfläche* oder einfach eine *Charakteristik* für die PDGl (I.11), falls für alle $x_0 \in \mathscr{F}$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) \frac{\partial \sigma(x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma(x_0)}{\partial x_j} = 0. \tag{I.16}$$

Die PDGl erster Ordnung (I.16) heißt *charakteristische Gleichung* von (I.11).

Im Falle $n = 2$ sprechen wir von *charakteristischen Linien*.
Wenn alle Hyperflächen $\sigma(x) = c$ für $a < c < b$ charakteristisch sind, so füllen diese Hyperflächen einen Teil des Gebietes Ω aus; sie überschneiden sich nicht, da die Mengen $x \in \Omega$ mit $\sigma(x) = c_1$ und $\sigma(x) = c_2$ keine Punkte gemeinsam haben. Insbesondere können wir (in einem gewissen Bereich von Ω) jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ *genau eine* Hyperfläche $\sigma(x) = c_0$ zuordnen, in der x_0 liegt. Diesen Wert c_0 können wir als neue Koordinate von $x \in \Omega$ einführen. Setzt man also

$$y_1 = \sigma(x),$$

so sieht man aus Gleichung $\tilde{a}_{lk} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$, (I.14), dass nach der Koordinatentransformation der Eintrag links oben in der Koeffizientenmatrix verschwindet, $\tilde{a}_{11} = 0$. Dies bedeutet, je mehr charakteristische Hyperflächen man kennt, desto mehr Koeffizienten $\tilde{a}_{jj}$ verschwinden zu 0 und die transformierte PDGl wird einfacher.

Beispiel I.4 (a) Die charakteristische Gleichung von $u_{xy} = 0$ lautet $\sigma_x \sigma_y = 0$, sodass $\sigma_x = 0$ und $\sigma_y = 0$ die charakteristischen Linien definieren. Diese sind parallel zu den Koordinatenachsen, also sind $y = c_1$ ($\sigma(x, y) = y - c_1 = 0$) und $x = c_2$ ($\sigma(x, y) = x - c_2 = 0$) die Charakteristiken.
(b) Die charakteristische Gleichung von

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0, \quad x \neq 0, y \neq 0$$

lautet $x^2\sigma_x^2 - y^2\sigma_y^2 = 0$. Wegen $\det A = x^2(-y^2) - 0 = -x^2y^2 < 0$ ist die Gleichung hyperbolisch.
Allgemeines Vorgehen bei $n = 2$ Variablen. Wir schreiben die Charakteristikengleichung für die allgemeine lineare PDGL zweiter Ordnung in 2 Variablen auf. Die charakteristische Gleichung von $a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = 0$ ist

$$a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x \sigma_y + c\sigma_y^2 = 0 \Leftrightarrow a \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2 + \frac{\sigma_x}{\sigma_y} + c = 0.$$

Man beachte, dass der Typ bestimmt ist durch $\det A = ac - b^2$. Wegen $\operatorname{grad}\sigma \neq 0$, ist die Gleichung $\sigma(x, y) = c$ lokal auflösbar, etwa nach y, $y = y(x)$, sodass nach dem Auflösungssatz $y' = -\sigma_x/\sigma_y$. Dasselbe Ergebnis erhält man durch Differentiation von $\sigma(x, y) =$ const.. Der Differentialformenkalkül liefert $\mathrm{d}\sigma(x, y) = \mathrm{d}\,\text{const.}$ oder $\sigma_x\, \mathrm{d}x + \sigma_y\, \mathrm{d}y = 0$ bzw. $y'(x) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\sigma_x/\sigma_y$. Setzt man dies in die Charakteristikengleichung ein, so hat man

$$a(y')^2 - 2by' + c = 0,$$

mit den Lösungen (falls $a \neq 0$)

$$y' = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Man erkennt, dass eine elliptische Gleichung gar keine Charakteristiken besitzt, eine parabolische Gleichung besitzt eine Schar von Charakteristiken und eine hyperbolische Gleichung hat zwei Scharen charakteristischen Linien.
Der hyperbolische Fall. Ist $c_1 = \sigma_1(x, y)$ die erste Familie von Charakteristiken und $c_2 = \sigma_2(x, y)$ die zweite Familie, so führt man die neuen Variablen

$$\xi = \sigma_1(x, y), \quad \eta = \sigma_2(x, y)$$

ein. Dann verschwinden die beiden diagonalen Koeffizienten $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$ und die hyperbolische Gleichung liegt in *charakteristischer Form* vor

$$2\tilde{b}\, \tilde{u}_{\xi\eta} + F(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta) = 0.$$

Der parabolische Fall. Wegen $\det A = 0$, gibt es nur *eine* Familie von charakteristischen Linien, etwa $c_1 = \sigma_1(x, y)$. Nach der Koordinatentransformation

$$z = \sigma_1(x, y), \quad y = y.$$

verschwindet nicht nur der Koeffizient $\tilde{a} = 0$. Wegen $\det A = \det\tilde{A} = \tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2 = 0$ verschwindet auch $\tilde{b} = 0$. Die transformierte parabolische Gleichung hat dann die *charakteristische Form*

$$\tilde{c}\, \tilde{u}_{yy} + F(z, y, \tilde{u}, \tilde{u}_z, \tilde{u}_y) = 0.$$

In unserem obigen Beispiel ist die charakteristische Gleichung

$$x^2(y')^2 - y^2 = 0, \quad y' = \pm y/x.$$

Dies führt auf

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \pm\frac{\mathrm{d}x}{x}, \qquad \ln\left|y\right| = \pm\ln|x| + c_0.$$

Wir haben zwei Familien von charakteristischen Linien:

$$y = c_1 x, \quad y = \frac{c_2}{x}.$$

Tatsächlich führt in unserem Beispiel die Koordinatentransformation

$$\xi = \frac{y}{x} = c_1, \quad \eta = xy = c_2$$

auf

$$\begin{array}{lllll} \eta_x = y, & \eta_y = x, & \eta_{xx} = 0, & \eta_{yy} = 0, & \eta_{xy} = 1, \\ \xi_x = -\dfrac{y}{x^2}, & \xi_y = \dfrac{1}{x}, & \xi_{xx} = 2\dfrac{y}{x^3}, & \xi_{yy} = 0, & \xi_{xy} = -\dfrac{1}{x^2}. \end{array}$$

Damit hat (I.12) die Gestalt

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \tilde{u}_{\xi\xi}\,\xi_x^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta}\,\xi_x\eta_x + \tilde{u}_{\eta\eta}\,\eta_x^2 + \tilde{u}_\xi\,\xi_{xx} + \tilde{u}_\eta\,\eta_{xx} \\ u_{yy} &= \tilde{u}_{\xi\xi}\,\xi_y^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta}\,\xi_y\eta_y + \tilde{u}_{\eta\eta}\,\eta_y^2 + \tilde{u}_\xi\,\xi_{yy} + \tilde{u}_\eta\,\eta_{yy} \end{aligned}$$

Beachtet man $x^2 = \eta/\xi$, $y^2 = \xi\eta$ und setzt diese Werte und die der partiellen Ableitungen von ξ und η ein, so hat man

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \tilde{u}_{\xi\xi}\frac{y^2}{x^4} - 2\frac{y^2}{x^2}\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta}y^2 + 2\frac{y}{x^3}\tilde{u}_\xi, \\ u_{yy} &= \tilde{u}_{\xi\xi}\frac{1}{x^2} + 2\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta}x^2. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = -4y^2\tilde{u}_{\xi\eta} + 2\frac{y}{x}\tilde{u}_\xi &= 0 \\ \tilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2}\frac{1}{xy}\tilde{u}_\xi &= 0. \end{aligned}$$

Wegen $\eta = xy$, lautet die charakteristische Form der Gleichung

$$\tilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2\eta}\tilde{u}_\xi = 0.$$

Allgemeine Lösung der Gleichung. Substituiert man weiter $v = \tilde{u}_\xi$, so erhält man $v_\eta - \frac{1}{2\eta}v = 0$ was der gew. DGl $v' - \frac{1}{2\eta}v = 0$ entspricht. Folglich ist $v(\eta,\xi) = c(\xi)\sqrt{\eta}$. Integriert man bezügl.

ξ, so erhält man $\tilde{u}(\xi,\eta) = A(\xi)\sqrt{\eta} + B(\eta)$. Die Rücktransformation zu den Ausgangsvariablen x und y liefert die allgemeine Lösung

$$u(x,y) = A\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{xy} + B(xy).$$

(c) Die eindimensionale Wellengleichung $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$. Die charakteristische Gleichung $\sigma_t^2 = a^2\sigma_x^2$ führt auf die zwei Lösungen

$$-\sigma_t/\sigma_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \dot{x} = \pm a.$$

Somit sind die charakteristischen Linien $x = at + c_1$ und $x = -at + c_2$. Die Koordinatentransformation $\xi = x - at$ und $\eta = x + at$ führt auf $\tilde{u}_{\xi\eta} = 0$, mit der allgemeinen Lösung $\tilde{u}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$. Folglich ist $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$ die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.
(d) Die Wellengleichung in n Dimensionen hat die charakteristische Gleichung

$$\sigma_t^2 - a^2\sum_{i=1}^{n}\sigma_{x_i}^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch die *charakteristischen Kegel*

$$\sigma(x,t) = a^2(t - t^{(0)})^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})^2 = 0,$$

wobei der Punkt $(x^{(0)}, t^{(0)})$ die Spitze des Kegels ist. In der Tat ist

$$\sigma_t = 2a^2(t - t^{(0)}), \quad \sigma_{x_i} = -2(x_i - x_i^{(0)})$$

und weiter $\sigma_t^2 - a^2\sum_{i=1}^{n} 4(x_i - x_i^{(0)})^2 = 0$.
Außerdem gibt es auch charakteristische Hyperebenen,

$$\sigma(x,t) = at + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0,$$

wobei $\|b\| = 1$.
(e) Die Wärmeleitungsgleichung hat die charakteristische Gleichung $\sum_{i=1}^{n}\sigma_{x_i}^2 = 0$, was $\sigma_{x_i} = 0$ für alle $i = 1,\dots,n$ liefert, sodass $t = c$ die einzige Familie von charakteristischen Linien ist.
(f) Die Poisson- und Laplacegleichung haben die selbe charakteristische Gleichung, die auf $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \cdots = \sigma_{x_n} = 0$ führt. Also gibt es keine reguläre Fläche, die die Charakteristikengleichung erfüllt. Die Gleichungen haben keine charakteristischen Flächen.

I.3.5 Die schwingende Saite

In Beispiel I.4 (c) wurde mit Hilfe der Charakteristiken $\xi = x - at = c_1$ und $\eta = x + at = c_2$ gezeigt, dass $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$ die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist. Dabei heißt f *Vorwärtswelle* und g *Rückwärtswelle*. Die allg. Lösung ist also eine Überlagerung aus Vorwärts- und Rückwärtswelle.

(a) Die unendliche Saite

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP) für die unendliche Saite. $u(x,t)$ ist die Auslenkung der Saite aus der Ruhelage am Ort x zur Zeit t. Die Anfangszeit sei $t=0$.

$$\begin{aligned} u_{tt}-a^2u_{xx}&=0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)&=u_0(x),\\ u_t(x,0)&=u_1(x), \end{aligned} \tag{I.17}$$

wobei u_0 und u_1 gegebene Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind. Als *klassische Lösung* des obigen Anfangswertproblems bezeichnet man alle die Lösungen, die für $t>0$ zweimal stetig differenzierbar sind und für $t\geq 0$ einmal stetig differenzierbar sind. Dies sind die minimalen Glattheitsbedingungen an u, damit die obigen drei Bedingungen im klassischen Sinne erfüllt werden können. Eine Funktion u, die stückweise stetig ist und (I.17) erfüllt heißt *verallgemeinerte Lösung*.
$u_0(x)$ steht für die Anfangsauslenkung der Saite am Ort x und $u_1(x)$ beschreibt den Anfangsimpuls, den die Saite am Ort x erfährt (Hammerschlag auf eine Klaviersaite).
Setzt man die Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung $u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$ ein, so erhält man

$$u_0(x)=f(x)+g(x), \quad u_1(x)=-af'(x)+ag'(x).$$

Differenziert man die erste, so hat man $u_0'(x)=f'(x)+g'(x)$, sodass

$$f'(x)=\frac{1}{2}u_0'(x)-\frac{1}{2a}u_1(x), \quad g'(x)=\frac{1}{2}u_0'(x)+\frac{1}{2a}u_1(x).$$

Integriert man diese beiden Gleichungen von 0 bis x, so hat man

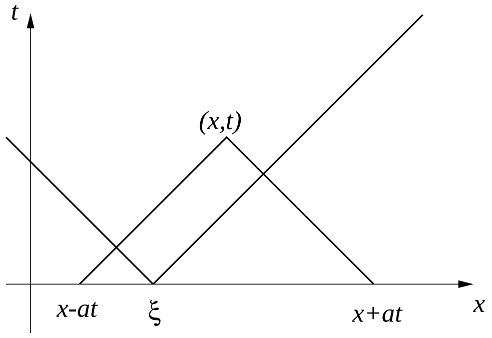
$$f(x)=\frac{1}{2}u_0(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x u_1(y)\,\mathrm{d}y+A, \quad g(x)=\frac{1}{2}u_0(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x u_1(y)\,\mathrm{d}y+B,$$

wobei A und B solche Konstanten sind, dass $u_0(x)=f(x)+g(x)$ erfüllt ist, also dass gilt $A+B=0$. Schließlich haben wir

$$\begin{aligned} u(x,t)&=f(x-at)+g(x+at)\\ &=\frac{1}{2}(u_0(x+at)+u_0(x-at))-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}u_1(y)\,\mathrm{d}y+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}u_1(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

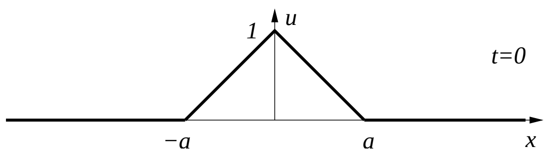
$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}(u_0(x+at)+u_0(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(y)\,\mathrm{d}y.} \tag{I.18}$$

Diese Formel ist die *d'Alembertsche Wellenformel (1746).*



Aus Gleichung (I.18) folgt unmittelbar, dass die Lösung $u(x,t)$ eindeutig durch die Werte der Anfangfunktionen u_0 und u_1 im Intervall $[x-at, x+at]$ bestimmt ist, dessen Endpunkte durch die charakteristischen Linien durch den Punkt (x,t) herausgeschnitten werden. Dieses Intervall heißt *Abhängigkeitsbereich* für die Lösung $u(x,t)$, wie in der nebenstehenden Figur dargestellt.

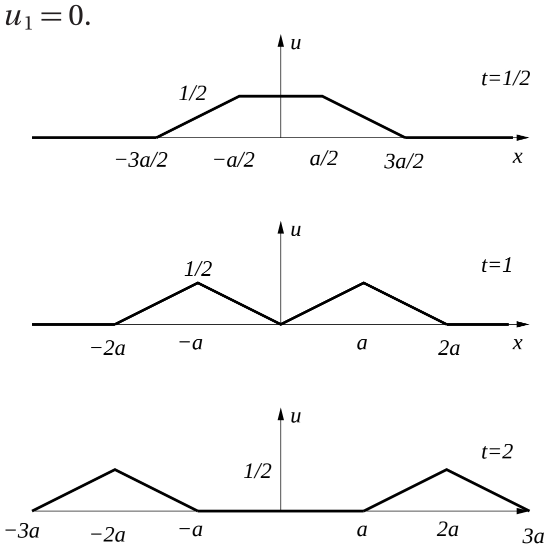
Umgekehrt *beeinflussen* die Anfangswerte am Punkt $(\xi,0)$ der x-Achse den Funktionswert $u(x,t)$ in dem dreieckigen Gebiet, mit der Spitze bei $(x,0)$, welches durch die Charakteristiken begrenzt wird. Das heißt, $u(x,t)$ wird beeinflusst durch die Werte am Punkt $(\xi,0)$, wenn $\xi - at < x < \xi + at$. Dies bedeutet, dass sich unser Signal oder unsere Störung u höchstens mit der Geschwindigkeit a ausbreitet.



Beispiel I.5 Wir wollen die folgende Lösung (I.18) der eindimensionalen Wellengleichung interpretieren. Angenommen, $u_1(x) = 0$ für alle x und

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

In diesem Beispiel betrachten wir eine Saite, die zur Zeit $t = 0$ gezupft wird, wie im nebenstehenden Bild gezeigt ist. Dies ist die Funktion $u_0(x)$. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null, $u_1 = 0$.



In diesen Bildern ist das Verhalten der Saite dargestellt zu verschiedenen Momenten. Der Anfangspeak teilt sich in zwei halb so hohe Peaks, von denen der eine mit der Geschwindigkeit a nach rechts und der andere mit der selben Geschwindigkeit nach links läuft.

Üblicherweise setzt man voraus, dass $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ sind. In diesem Falle ist die Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und wir können die beiden zweiten Ableitungen berechnen und diese sind stetig. Andererseits ist die rechte Seite der d'Alembertschen Formel auch für beliebige stetige Funktionen u_1 und beliebige Funktionen u_0 sinnvoll definiert. Wenn wir diese Lösungen $u(x,t)$ als *verallgemeinerte Lösungen* des Cauchy-Problems ansehen, dann müssen wir uns überlegen, welchen Sinn der Ausdruck $u_{tt} - a^2 u_{xx}$ noch haben soll. Insbesondere brauchen wir einen allgemeineren Funktionsbegriff und einen allgemeineren Ableitungsbegriff. Dies ist der Inhalt des nächsten Kapitels.

Stellen, an denen die Funktion $u(x,t)$ nicht differenzierbar ist, heißen *Singularitäten*. In unserem Fall ist die Anfangsfunktion $u_0(x) = u(x,0)$ an den Stellen $-a, 0, a$ singulär. Diese Singularitäten bleiben für alle t erhalten und werden entlang der Charakteristiken transportiert, das heißt, wenn u an der Stelle (x_0, t_0) singulär ist, dann ist u auch an den Stellen (x_+, t_1) oder (x_-, t_1) singulär, wobei

$$x_+ - at = x_0 - at_0, \quad x_- + at = x_0 + at_0, \quad t_1 > 0.$$

Dieses Phänomen ist typisch für hyperbolische Gleichungen. Bei parabolischen und elliptischen Gleichungen hingegen, werden Singularitäten in den Anfangs- oder Randwerten unmittelbar geglättet.

Beispiel I.6 (Dieses Beispiel wurde in der Vorlesung nicht gebracht) Es sei $u(x,t)$ die Lösung des AWP

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x) = \chi_{[-2,2]}(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) = u_0(x).$$

(a) Bestimmen Sie $u(0, 1/6)$.
(b) Bestimmen Sie das Verhalten von u für große Zeiten, $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.
(c) Berechnen Sie $\max u(x,t)$.
(d) Bestimmen Sie alle Punkte (x,t), wo $u \in \mathrm{C}^2$ ist.

Lösung. (a) Nach der d'Alembertschen Formel ist

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x+3t) + u_0(x-3t)) + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} u_1(y)\,\mathrm{d}y,$$

so dass $u(0, 1/6) = 7/6$.
(b) Es ist offenbar

$$\lim_{t\to\infty} u_0(x+3t) = \lim_{t\to\infty} u_0(x-3t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\int_{x-3t}^{x+3t} u_1(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}y = 4,$$

also ist $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{2}{3}$.
(c) Es ist

$$\max \int_{x-3t}^{x+3t} u_1(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}y = 4,$$

wobei dies Maximum für alle Punkte (x,y) angenommen wird, wo $x-3t \le -2$ und $x+3t \ge 2$. Außerdem wird das Maximum 1 der integralfreien Summanden angenommen für $x-3t \ge -2$ und $x+3t \le 2$. Somit liegt das Maximum $1 + \frac{1}{6}4 = \frac{5}{3}$ genau dann vor, wenn

$$x - 3t = -2 \quad \text{und} \quad x + 3t = 2,$$

also wenn $(x,t) = (0, 2/3)$.
(d) Die Anfangssingularitäten liegen bei $x = \pm 2$. Diese werden entlang der Charakteristiken transportiert. Die Lösung ist in C^2 für alle Punkte, die nicht auf den 4 Geraden

$$x \pm 3t = -2, \quad x \pm 3t = 2$$

liegen.

Theorem I.2 *Es sei $T > 0$ fixiert. Ferner seien $x \in \mathbb{R}$ und $0 \le t \le T$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Dann ist das AWP* (I.17) *ein korrekt gestelltes Problem, u ist dann eine klassische Lösung.*

Beweis. Die d'Alembertsche Formel garantiert die Existenz und Eindeutigkeit von $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \cap [0,\infty))$. Andererseits erhalten wir für $u_0 \in C(\mathbb{R})$ und lokal-integrierbares u_1 eine verallgemeinerte Lösung.
Wir müssen noch Stabilität zeigen. Es seien u und $\tilde{u}$ Lösungen des AWP mit den Anfangsbedingungen u_0, u_1 bzw. $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$, wobei

$$|u_0(x) - \tilde{u}(x)| < \delta, \quad |u_1(x) - \tilde{u}_1(x)| < \delta$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $0 \le t \le T$:

$$\begin{aligned}
&|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| \\
&\le \frac{1}{2}|u_0(x+at) - \tilde{u}_0(x+at)| + \frac{1}{2}|u_0(x-at) - \tilde{u}_0(x-at)| + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \left|u_1(y) - \tilde{u}_1(y)\right| \mathrm{d}y \\
&\le \delta + \frac{1}{2a} 2at\delta \le (1+T)\delta.
\end{aligned}$$

Wählt man also zu gegebenem $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon/(1+T)$, so hat man für alle $0 \le t \le T$ und alle $x \in \mathbb{R}$

$$|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| < \varepsilon.$$

Dies beweist die Stabilität des Problems. ∎

Bemerkung I.3 (a) Das AWP ist nicht korrekt gestellt im Bereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, also für alle $t \in \mathbb{R}_+$.
(b) Auch für $T < t < 0$ ist das AWP korrekt gestellt. Physikalisch bedeutet dies, dass Schwingungsprozesse reversibel sind.

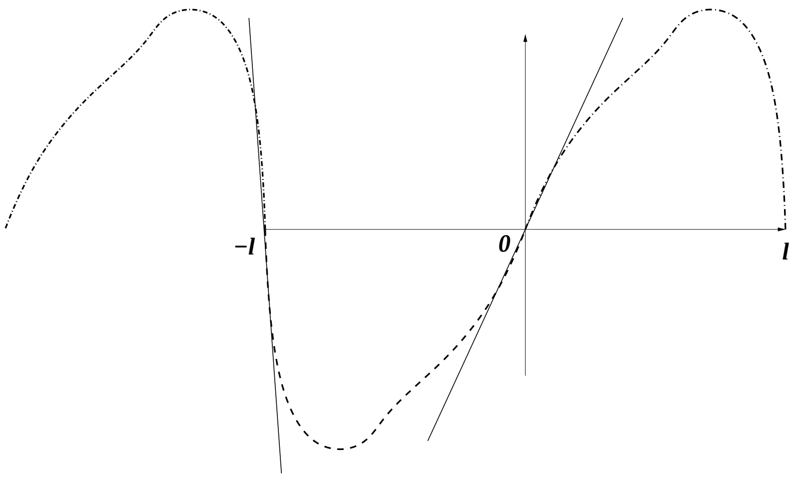
(b) Die endliche Saite

Wir betrachten das folgende Rand-Anfangswertproblem (RAWP), bei dem sowohl Anfangswerte (Anfangsauslenkung und Anfangsimpuls) gegeben sind, wie auch Randbedingungen, die für alle t gelten.

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le l, \quad t > 0, \\
u(0,x) &= u_0(x), \quad 0 \le x \le l \\
u_t(0,x) &= u_1(x), \quad 0 \le x \le l, \\
u(0,t) &= u(l,t) = 0, \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{I.19}$$

In diesem Fall handelt es sich um eine eingespannte Saite der Länge l. Angenommen, die gegebenen Funktionen $u_0 \in C^2([0,l])$ und $u_1 \in C^1([0,l])$ erfüllen die Bedingungen

$$u_0(0) = u_0(l) = 0, \quad u_1(0) = u_1(l) = 0, \quad u_0''(0) = u_0''(l) = 0. \tag{I.20}$$



Um das RAWP zu lösen definieren wir neue Funktionen $\tilde{u}_0$ und $\tilde{u}_1$, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind wie folgt: zunächst setzten wir beide Funktionen auf $[-l, l]$ als *ungerade* Funktionen fort, also ist $\tilde{u}_i(-x) = -u_i(x)$, $i = 0, 1$. Dann setzen wir $\tilde{u}_i$ als $2l$-periodische Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

Durch die Randwerte 0, werden $\tilde{u}_0$ und $\tilde{u}_1$ stetig. Durch die ungerade Fortsetzung bei 0, existieren die ersten Ableitungen von $\tilde{u}_0$ und $\tilde{u}_1$ und sind stetig bei 0 und l und $-l$. Die obige Annahme $u_0''(0) = u_0''(l) = 0$ sichert schließlich, dass $\tilde{u}_0 \in C^2(\mathbb{R})$. Setzt man

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x+at) + \tilde{u}_0(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(y)\,\mathrm{d}y,$$

dann löst $u(x,t)$ das RAWP.

Literaturverzeichnis

[Eva98] L. C. Evans. *Partial differential equations.* Number 19 in Graduate Studies in Mathematics. AMS, Providence, 1998.

[Joh82] F. John. *Partial differential equations.* Number 1 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1982.

[PR05] Y. Pinchover and J. Rubinstein. *An introduction to partial differential equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[Str92] W. A. Strauss. *Partial differential equations.* John Wiley & Sons, New York, 1992.