Analysis 4 für Physiker – SS 2007

Axel Schüler

14. Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

Kapitel V

Hilbertraum

V.3 Lineare Operatoren im Hilbertraum

In diesem Abschnitt behandeln wir beschränkte lineare Operatoren, adjungierte Operatoren. Das Spektrums eines beschränkten Operators wird untersucht. Als Grundkörper wählen wir immer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

V.3.1 Beschränkte lineare Operatoren

Es seien $(E_1, \|\cdot\|_1)$ und $(E_2, \|\cdot\|_2)$ normierte lineare Räume. Aus dem Abschnitt „Topologie und Metrische Räume" wiederholen wir den Begriff der Stetigkeit: Eine Abbildung $T \colon E_1 \to E_2$ heißt *stetig in* $x_0 \in E_1$, wenn für alle Folgen (x_n) aus E_1 mit $x_n \longrightarrow x_0$ in E_1 folgt, dass $T(x_n) \longrightarrow T(x_0)$ in E_2. Die Abbildung $T \colon E_1 \to E_2$ heißt *stetig*, wenn T stetig ist in jedem Punkt von E_1.

Definition V.1 (a) Eine lineare Abbildung $T \colon E_1 \to E_2$ heißt *beschränkt*, falls es eine positive Konstante $C > 0$ derart gibt, dass

$$\|T(x)\|_2 \le C\,\|x\|_1\,, \quad \text{für alle} \quad x \in E_1. \tag{V.1}$$

(b) Angenommen $T \colon E_1 \to E_2$ ist beschränkt, dann ist die *Operatornorm* $\|T\|$ von T die kleinste derartige Zahl C, für die (V.1) für alle $x \in E_1$ gilt. Also ist

$$\|T\| = \inf\{C > 0 \mid \ \forall\, x \in E_1 \colon \|T(x)\|_2 \le C\,\|x\|_1\}\,. \tag{V.2}$$

(a) Eigenschaften der Operatornorm

Es gilt:

$$\text{(a)} \quad \|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|_2}{\|x\|_1} \mid x \in E_1,\ x \ne 0\right\}, \tag{V.3}$$

$$\text{(b)} \quad \|T\| = \sup\{\|T(x)\|_2 \mid \|x\|_1 \le 1\} \tag{V.4}$$

$$\text{(c)} \quad \|T\| = \sup\{\|T(x)\|_2 \mid \|x\|_1 = 1\} \tag{V.5}$$

Beweis. Def. $\to$ (a): In der Definition kann man auf $x=0$ verzichten, so dass

$$\|T\| = \inf\{C>0 \mid \frac{\|T(x)\|_1}{\|x\|_2} \leq C \ \forall x \neq 0\},$$

die kleinste obere Schranke aller Werte $\frac{\|T(x)\|_1}{\|x\|_2}$, $x \neq 0$ ist.
(a) $\longleftrightarrow$ (c): Wir können uns bei (a) auf normierte Vektoren $\|x\|=1$ beschränken, denn

$$\frac{\|T(\alpha x)\|_2}{\|\alpha x\|_1} = \frac{|\alpha|\,\|T(x)\|_2}{|\alpha|\,\|x\|_1} = \frac{\|T(x)\|_2}{\|x\|_1}.$$

(b) $\longleftrightarrow$ (c): Sei $y \in E_1$ mit $\left\|y\right\| = \alpha \leq 1$ und $x = y/\alpha$. Dann ist x ein normierter Vektor und es gilt $\left\|T(y)\right\|_2 = \alpha\|T(x)\|_2 \leq \|T(x)\|_2$. Damit ist $\sup_{\|x\|_1 \leq 1}\|T(x)\|_2 \leq \sup_{\|x\|=1}\|T(x)\|_2$. Die umgekehrte Ungleichung ist aber auch klar, da die Referenzmenge $\|x\| \leq 1$ die Menge der x mit $\|x\|=1$ umfasst. Das Supremum der größeren Menge ist nicht kleiner. ■

Man beachte, dass aus (a) folgt, dass $\|T\|$ ebenfalls eine obere Schranke für alle $\|T(x)\|_2/\|x\|_1$ ist, also

$$\forall x \neq 0 : \frac{\|T(x)\|_2}{\|x\|_1} \leq \|T\|$$

bzw.

$$\forall x \in E_1 : \ \|T(x)\|_2 \leq \|T\|\,\|x\|_1 \,. \tag{V.6}$$

Satz V.1 *Es sei $T\colon E_1 \to E_2$ eine lineare Abbildung zwischen den normierten Räumen E_1 und E_2.*
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) *T ist beschränkt.*
(b) *T ist stetig.*
(c) *T ist stetig in einem Punkt $x_0 \in E_1$.*

Beweis. (a) $\to$ (b). Dies folgt aus der Linearität von T und obiger Eigenschaft (V.6):

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq \|T\|\,\|x_1 - x_2\|,$$

und T ist sogar gleichmäßig stetig auf E_1.
(b) impliziert trivialerweise (c).
(c) $\to$ (a). Es sei T stetig in x_0. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass für $\|x - x_0\| < \delta$ folgt: $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$. Wir setzen $y := x - x_0$, dann folgt aus $\left\|y\right\| < \delta$

$$\left\|T(y + x_0) - T(x_0)\right\| = \left\|T(y)\right\| < \varepsilon.$$

Sei nun $z \in E_1$ mit $\|z\| \leq 1$. Dann hat man $\|\delta/2\,z\| \leq \delta/2 < \delta$; folglich ist $\|T(\delta/2\,z)\| < \varepsilon$. Wegen Homogenität von T folgt weiter, $\|T(z)\| < 2\varepsilon/\delta$; und somit nach Eigenschaft (V.4) $\|T\| \leq 2\varepsilon/\delta$. Also ist T beschränkt. ■

Notation. Es seien E und F normierte lineare Räume. Mit $\mathscr{L}(E,F)$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen von E nach F. Im Falle $E = F$ schreiben wir einfach $\mathscr{L}(E)$ für $\mathscr{L}(E,F)$.

Satz V.2 *(a) Es seien E und F normierte lineare Räume. Dann ist $\mathscr{L}(E,F)$ ebenfalls ein normierter linearer Raum, wenn wir die lineare Struktur durch*

$$(S+T)(x)=S(x)+T(x), \quad (\lambda T)(x)=\lambda\, T(x)$$

definieren, wobei $S,T\in\mathscr{L}(E,F)$, $\lambda\in\mathbb{K}$. Zusammen mit der Operatornorm $\|T\|$ wird $\mathscr{L}(E,F)$ ein normierter linearer Raum.
(b) Wenn $T\in\mathscr{L}(E,F)$ und $S\in\mathscr{L}(F,G)$, so ist $S\circ T\in\mathscr{L}(E,G)$ und $\|S\circ T\|\le\|S\|\,\|T\|$.

Beweis. (a) Wir weisen die drei Normeigenschaften nach. Wenn $\|T\|=0$, so $\|T(x)\|_2=0$ für alle $x\in E$. Wegen der Definitheit in F folgt $T(x)=0$ für alle x. Das heißt aber $T=0$. Weiterhin ist für alle $\lambda\in\mathbb{K}$ und $x\in E$, $\|(\lambda T)(x)\|=\|\lambda T(x)\|_2=|\lambda|\,\|T(x)\|_2$. Geht man hier zum Supremum über alle $x\in E_1$, $\|x\|_1\le 1$ über, so hat man $\|\lambda T\|=|\lambda|\,\|T\|$. Wir zeigen, dass die Summe $S+T$ zweier beschränkter linearer Operatoren wieder beschränkt ist. Sei also für alle $x\in E$ $\|T(x)\|\le\|T\|\,\|x\|$ und $\|S(x)\|\le\|S\|\,\|x\|$, so folgt nach Dreiecksungleichung in F

$$\|(S+T)(x)\|=\|S(x)+T(x)\|\le\|S(x)\|+\|T(x)\|\le\|S\|\,\|x\|+\|T\|\,\|x\|=(\|S\|+\|T\|)\,\|x\|.$$

Somit ist $S+T$ beschränkt und für die Operatornorm ist die Dreiecksungleichung $\|S+T\|\le\|S\|+\|T\|$ erfüllt.
(b) Für alle $x\neq 0$, $x\in E$ gilt

$$\frac{\|S(T(x))\|}{\|x\|}=\frac{\|S(T(x))\|}{\|T(x)\|}\,\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}\le\|S\|\,\|T\|.$$

Hieraus folgt nach Definition, $\|S\circ T\|\le\|S\|\,\|T\|$. ■

Man beachte, dass $\mathscr{L}(E,F)$ vollständig ist, genau dann, wenn F vollständig ist.

(b) Beispiele

Beispiel V.1 (a) $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ bzw. $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist mit der Operatornorm ein normierter linearer Raum. Jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen normierten Räumen ist beschränkt. Ist $A=(a_{ij})$ eine Matrixdarstellung von $T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, so ist $\|T\|=\|A\|\le\left(\sum_{i,j}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Für $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ erhalten wir

$$T(x)=\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j,\,\dots,\sum_{j=1}^n a_{mj}x_j\right);$$

nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU) also

$$\begin{aligned}\|T(x)\|_2^2&=\sum_{i=1}^m\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2\le\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^m|a_{ij}x_j|\right)^2\\&\le\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\sum_{j=1}^n|x_j|^2=\left(\sum_{i,j}a_{ij}^2\right)\sum_{j=1}^n|x_j|^2=C^2\,\|x\|^2,\end{aligned}$$

wobei $C = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$. Hieraus folgt die Behauptung.
(b) Der Dualraum $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ der stetigen linearen Funktionale auf E ist ein vollständiger normierter Raum. (Vgl. Übungsaufgabe 1.3 und 1.4). Sei insbesondere $E = H$ ein Hilbertraum, dann sind nach V.1.4 alle linearen Funktionale $\Phi_y(x) = \langle x\,, y \rangle$, $x \in H$, stetig mit $\|\Phi_y\| = \|y\|$. Umgekehrt sind alle stetigen linearen Funktionale F von dieser Gestalt, $F = \Phi_y$ für ein geeignetes $y \in H$. Nach der obigen Bemerkung und wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ ist der Dualraum E' stets ein vollständiger normierter Raum (Banachraum).
(c) Es sei $H = \mathrm{L}^2((0,1))$, $g \in \mathrm{C}([0,1])$,

$$T_g(f)(t) = g(t)f(t), \quad f \in H, \quad t \in (0,1)$$

definiert einen beschränkten linearen Operator auf H. (Siehe ÜA 2.1)
(d) Es sei $H = \mathrm{L}^2((0,1))$, $k(s,t) \in \mathrm{L}^2([0,1] \times [0,1])$. Dann definiert

$$(Kf)(t) = \int_0^1 k(s,t)f(s)\,\mathrm{d}s, \quad f \in H = \mathrm{L}^2([0,1])$$

einen beschränkten linearen Operator $K \in \mathscr{L}(H)$. Es ist

$$\begin{aligned}\big|(Kf)(t)\big|^2 &= \left|\int_0^1 k(s,t)f(s)\,\mathrm{d}s\right|^2 \le \left(\int_0^1 |k(s,t)|\,\big|f(s)\big|\,\mathrm{d}s\right)^2 \\ &\underset{\text{CSU}}{\le} \int_0^1 |k(s,t)|^2\,\mathrm{d}s \int_0^1 \big|f(s)\big|^2\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 |k(s,t)|^2\,\mathrm{d}s\,\big\|f\big\|_H^2.\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}\big\|K(f)\big\|_H^2 &\le \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(s,t)|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\,\big\|f\big\|_H^2 \\ \big\|K(f)\big\|_H &\le \|k\|_{\mathrm{L}^2([0,1]\times[0,1])}\,\big\|f\big\|_H.\end{aligned}$$

Das beweist $Kf \in H$ und mehr noch $\|K\| \le \|k\|_{\mathrm{L}^2([0,1]^2)}$. Man nennt K einen *Integraloperator* und $k(s,t)$ den *Kern* von K.
(e) Es sei $H = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$,

$$(V_a f)(t) = f(t-a), \quad t \in \mathbb{R},$$

definiert einen beschränkten linearen Operator den so genannten *Verschiebungsoperator* (oder Shift-Operator). Tatsächlich gilt

$$\big\|V_a f\big\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \big|f(t-a)\big|^2\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \big|f(t)\big|^2\,\mathrm{d}t = \big\|f\big\|_2^2;$$

da alle Quotienten $\big\|V_a(f)\big\| / \big\|f\big\| = 1$ sind, folgt $\|V_a\| = 1$.
(f) $H = \ell_2$. Wir definieren den *Rechts-Shift* S (oder rechten Verschiebungsoperator) durch

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Offenbar gilt $\|S(x)\| = \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Somit gilt auch hier $\|S\| = 1$.
(g) Es sei $E_1 = \mathrm{C}^1([0,1])$ und $E_2 = \mathrm{C}([0,1])$. Wir definieren den *Differentiationsoperator*

$$(Df)(t) = f'(t), \quad f \in \mathrm{C}^1([0,1]),\ t \in [0,1].$$

Sei $\left\|f\right\|_1 = \left\|f\right\|_2 = \sup_{t\in[0,1]} \left|f(t)\right|$. Dann ist D linear aber unbeschränkt. Sei nämlich $f_n(t) = t^n$. Dann gilt $\left\|f_n\right\|_1 = 1$ und $Df_n(t) = nt^{n-1}$, so dass $\left\|Df_n\right\|_2 = n$. Somit gilt $\left\|Tf_n\right\|_2 / \left\|f_n\right\|_1 = n \to +\infty$ für $n \to \infty$. D ist unbeschränkt.
Wählt man jedoch eine andere Norm in E_1, nämlich $\left\|f\right\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} \left|f(t)\right| + \sup_{t\in[0,1]} \left|f'(t)\right|$ und die Norm in E_2 wie oben, dann ist D beschränkt, denn

$$\left\|Tf\right\|_2 = \sup_{t\in[0,1]} \left|f'(t)\right| \le \left\|f\right\|_1 \Longrightarrow \|T\| \le 1.$$

V.3.2 Der adjungierte Operator

In diesem Abschnitt sei H stets ein Hilbertraum und $\mathscr{L}(H)$ der Raum der stetigen (beschränkten) linearen Operatoren auf H.
Es sei $T \in \mathscr{L}(H)$ beschränkt und $y \in H$ fixiert. Dann definiert

$$F(x) = \left\langle T(x), y \right\rangle, \quad x \in H$$

ein stetiges lineares Funktional auf H. In der Tat ist F als Verknüpfung zweier linearer Abbildungen T und $\langle \cdot, y\rangle$ eine lineare Abbildung. Ferner ist F stetig, da sowohl T als auch $\langle \cdot, y\rangle$ stetig sind.
Nach dem Rieszschen Darstellungssatz (Theorem in V.1.4) existiert ein $z \in H$ mit

$$\left\langle T(x), y \right\rangle = F(x) = \langle x, z\rangle.$$

Diese Korrespondenz $\left\langle T(x), y\right\rangle = \langle x, z\rangle$, $x \in H$, die auf diese Weise jedem y ein z zuordnet bezeichnen wir als $z = T^*(y)$. Wir zeigen, dass T^* linear ist. Sei dazu $z_1 = T^*(y_1)$, also $\left\langle T(x), y_1\right\rangle = \langle x, z_1\rangle$, $x \in H$. Addiert man beide Gleichungen, so hat man $\left\langle T(x), y + y_1\right\rangle = \langle x, z + z_1\rangle$, $x \in H$; somit gilt $T^*(y + y_1) = z + z_1 = T^*(y) + T^*(y_1)$. Analog folgt durch Multiplikation mit λ, $\left\langle T(x), \lambda y\right\rangle = \langle x, \lambda z\rangle$, $x \in H$; also $T^*(\lambda y) = \lambda z = \lambda T^*(y)$.

Definition V.2 Die oben beschriebene Abbildung $T^*\colon H \to H$, $z = T^*(y)$, ist linear. Es gilt

$$\left\langle T(x), y\right\rangle = \left\langle x, T^*(y)\right\rangle, \quad x, y \in H. \tag{V.7}$$

T^* heißt der zu T *adjungierte* Operator.

Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$|F(x)| = \left|\left\langle T(x), y\right\rangle\right| \underset{\text{CSU}}{\le} \|T(x)\| \left\|y\right\| \le \|T\| \left\|y\right\| \|x\|.$$

Folglich ist F beschränkt mit

$$\|F\| \le \|T\| \left\|y\right\|$$

In V.1.4 wurde gezeigt, dass $\|F\| = \|z\| = \left\|T^*(y)\right\|$ gilt. Somit ist

$$\left\|T^*(y)\right\| \leq \|T\| \left\|y\right\| \quad \text{bzw.} \quad \left\|T^*\right\| \leq \|T\|. \tag{V.8}$$

Satz V.3 *Es seien $T, T_1, T_2 \in \mathscr{L}(H)$. Dann ist T^* beschränkt mit $\left\|T^*\right\| = \|T\|$. Es gilt ferner*

(a) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$ *und*

(b) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda}\, T^*$.

(c) $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$.

(d) *Ist T invertierbar in $\mathscr{L}(H)$, so auch T^*, und es gilt $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

(e) $(T^*)^* = T$.

Beweis. (e) Für alle $x, y \in H$ gilt

$$\left\langle x\,, (T^*)^*(y)\right\rangle = \left\langle T^*(x), y\right\rangle = \overline{\left\langle y\,, T^*(x)\right\rangle} = \overline{\left\langle T(y), x\right\rangle} = \left\langle x\,, T(y)\right\rangle,$$

daher ist für alle $x, y \in H$, $\langle x\,, T^{**}(y) - T(y)\rangle = 0$. Setzt man $x = T^{**}(y) - T(y)$, so erhält man $\left\|T^{**}(y) - T(y)\right\| = 0$ also $T^{**}(y) = T(y)$ für alle y. Das heißt aber, $T^{**} = T$.
Außerdem gilt $\|T\| = \left\|T^{**}\right\| \leq \left\|T^*\right\|$; sodass $\left\|T^*\right\| = \|T\|$.
(a) Für alle $x, y \in H$ ist

$$\begin{aligned}\left\langle (T_1 + T_2)(x), y\right\rangle &= \left\langle T_1(x) + T_2(x), y\right\rangle = \left\langle T_1(x), y\right\rangle + \left\langle T_2(x), y\right\rangle \\ &= \left\langle x\,, T_1^*(y)\right\rangle + \left\langle x\,, T_2^*(y)\right\rangle = \left\langle x\,, (T_1^* + T_2^*)(y)\right\rangle.\end{aligned}$$

Hieraus folgt (a). Die Teile (b), (c) und (d) verlaufen ähnlich leicht. ∎

Eine Abbildung $*: A \to A$ einer Algebra in sich, so dass die Eigenschaften (a), (b) und (c) erfüllt sind, heißt *Involution*, eine Algebra mit Involution heißt $*$-*Algebra*. Wir haben gesehen, dass $\mathscr{L}(H)$ eine nichtkommutative $*$-Algebra ist. Ein Beispiel für eine kommutative $*$-Algebra ist $\mathrm{C}(K)$, die Algebra der stetigen Funktionen über einer kompakten Menge, wobei die Involution gegeben ist durch $f^*(x) = \overline{f(x)}$.

Beispiel V.2 (Fortsetzung von Beispiel V.1)
(a) $H = \mathbb{C}^n$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt $A^* = (b_{ij})$ mit den Matrixelementen $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Es ist nämlich

$$\langle Ax\,, y\rangle = \left\langle \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right)_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \overline{y_i} = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \overline{\sum_{i=1}^n \overline{a_{ij}} y_i} = \sum_{j=1}^n x_j \overline{(By)_j} = \langle x\,, By\rangle.$$

(b) $H = \mathrm{L}^2([0,1])$, $T_g^* = T_{\overline{g}}$.
(c) $H = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, $V_a(f)(t) = f(t-a)$ (Verschiebungsoperator), $V_a^* = V_{-a}$.
(d) $H = \ell_2$. Der *Rechts-Shift* S war gegeben durch $S((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Wir berechnen seinen Adjungierten.

$$\langle S(x), y\rangle = \sum_{n=2}^\infty x_{n-1} y_n = \sum_{n=1}^\infty x_n y_{n+1} = \langle (x_1, x_2, \dots), (y_2, y_3, \dots)\rangle = \left\langle (x_n), S^*((y_n))\right\rangle.$$

Also ist $S^*((y_n)) = (y_2, y_3, \dots)$, das ist der *Links-Shift*.
(e) Multiplikation $(x_n) \mapsto (\alpha_n x_n)$ in ℓ_2. (siehe ÜA 2.1)

V.3.3 Klassen beschränkter linearer Operatoren

Es sei H ein *komplexer* Hilbertraum.

(a) Selbstadjungierte und normale Operatoren

In der Quantenmechanik spielen die (unbeschränkten) selbstadjungierten Operatoren die wichtigste Rolle.

Definition V.3 Ein Operator $A \in \mathscr{L}(H)$ heißt

(a) *selbstadjungiert*, falls $A^* = A$,

(b) *normal*, falls $A^*A = AA^*$,

ein selbstadjungierter Operator A heißt *positiv*, falls für alle $x \in H$ gilt $\langle A(x), x\rangle \geq 0$. In diesem Fall schreiben wir $A \geq 0$. Sind A und B selbstadjungiert, so schreiben wir $A \geq B$, falls $A - B \geq 0$.

Bei vielen Eigenschaften spielen die *Polarisierungsidentitäten* eine wichtige Rolle. In einem (reellen oder komplexen) Hilbertraum erhält man das innere Produkt auch aus der Norm zurück:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\left\|x+y\right\|^2 - \left\|x-y\right\|^2\right), \quad \text{falls} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}. \tag{V.9}$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\left\|x+y\right\|^2 - \left\|x-y\right\|^2 + \mathrm{i}\left\|x+\mathrm{i}y\right\|^2 - \mathrm{i}\left\|x-\mathrm{i}y\right\|^2\right), \quad \text{falls} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}. \tag{V.10}$$

Im Falle eines *komplexen* Hilbertraumes kann man in ähnlicher Weise $\langle A(x), y\rangle$ durch Terme der Form $\langle A(z), z\rangle$ ausdrücken. Im reellen Hilbertraum geht das nicht.

$$\begin{aligned} 4\langle A(x), y\rangle = {} & \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle + \\ & + \mathrm{i}\langle A(x+\mathrm{i}y), x+\mathrm{i}y\rangle - \mathrm{i}\langle A(x-\mathrm{i}y), x-\mathrm{i}y\rangle. \end{aligned} \tag{V.11}$$

Diese Identität wird in folgender Weise ausgenutzt:

$$\langle A(x), x\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in H \text{ liefert} \quad A = 0.$$

Tatsächlich folgt aus (V.11), dass $\langle A(x), y\rangle = 0$ für alle $x, y \in H$. Insbesondere gilt dies für $y = A(x)$, so dass $\|A(x)\| = 0$, also $A(x) = 0$ für alle $x \in H$ gilt; folglich ist $A = 0$.

Bemerkung V.1 (a) A ist normal genau dann, wenn $\|A(x)\| = \left\|A^*(x)\right\|$ für alle $x \in H$. In der Tat, ist A normal, so gilt für alle $x \in H$, dass $\langle A^*A(x), x\rangle = \langle AA^*(x), x\rangle$, was zur Folge hat, dass $\|A(x)\|^2 = \langle A(x), A(x)\rangle = \langle A^*(x), A^*(x)\rangle = \left\|A^*(x)\right\|^2$. Umgekehrt folgt aus der Polarisierungsidentität $\langle A^*A(x), x\rangle = \langle AA^*(x), x\rangle$ $\langle (A^*A - AA^*)(x), x\rangle = 0$ für alle x; Folglich ist $A^*A - AA^* = 0$, was zu zeigen war.
(b) Summen und reelle skalare Vielfache von selbstadjungierten Operatoren sind selbstadjungiert.
(c) Das Produkt AB zweier selbstadjungierter Operatoren ist selbstadjungiert genau dann, wenn A und B kommutieren, das heißt, $AB = BA$.

(d) H sei komplexer Hilbertraum. A ist selbstadjungiert, genau dann, wenn $\langle Ax\,,\,x\rangle$ für alle $x\in H$ reell ist

Beweis. Sei $A^*=A$. Dann ist $\langle Ax\,,\,x\rangle=\langle x\,,\,Ax\rangle=\overline{\langle Ax\,,\,x\rangle}\in\mathbb{R}$ reell; Sei umgekehrt $\langle Ax\,,\,x\rangle\in\mathbb{R}$ also für alle $x\in H$ gilt $\langle A(x),\,x\rangle=\langle x\,,\,A(x)\rangle$. Zusammen mit der Polarisierungsidentität (V.11) folgt dann $\big\langle A(x),\,y\big\rangle=\big\langle x\,,\,A(y)\big\rangle$ für alle x,y; also $A^*=A$. ∎

(b) Unitäre und isometrische Operatoren

Definition V.4 Es sei $T\in\mathscr{L}(H)$. Dann heißt T

(a) *unitär*, falls $\quad T^*T=I=T\,T^*$.

(b) *isometrisch*, falls $\quad \|T(x)\|=\|x\|$ für alle $x\in H$.

Satz V.4 (a) *Es sei H ein komplexer Hilbertraum. T ist genau dann isometrisch, wenn $T^*T=I$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\big\langle T(x),\,T(y)\big\rangle=\big\langle x\,,\,y\big\rangle$ für alle $x,y\in H$.*
(b) *T ist genau dann unitär, wenn T isometrisch und surjektiv ist.*
(c) *Sind S,T unitär, dann sind auch ST und T^{-1}. Die unitären Operatoren auf H bilden also eine Gruppe; man bezeichnet sie mit* $\mathrm{U}(H)$.

Beweis. (a) T isometrisch liefert $\langle T(x),\,T(x)\rangle=\langle x\,,\,x\rangle$ und weiter $\big\langle(T^*T-I)(x),\,x\big\rangle=0$ für alle x. Aus der Polarisierungsidentität folgt weiter $T^*T=I$; also $\big\langle(T^*T-I)(x),\,y\big\rangle=0$, für alle $x,y\in H$. Somit gilt $\big\langle T(x),\,T(y)\big\rangle=\big\langle x\,,\,y\big\rangle$. Setzt man hier $y=x$, so erhält man, dass T isometrisch ist.
(b) Angenommen, T ist unitär. Aus $T^*T=I$ folgt, T ist isometrisch. Wegen $T\,T^*=I$ ist T surjektiv.
Sei nun T isometrisch und surjektiv. Aus isometrisch folgt, dass $T(x)=0$ sofort $x=0$ impliziert; Also ist T bijektiv und besitzt einen inversen Operator T^{-1}. Setzt man $y=T^{-1}(z)$ in die Gleichung $\big\langle T(x),\,T(y)\big\rangle=\big\langle x\,,\,y\big\rangle$ ein, so hat man

$$\langle T(x),z\rangle=\big\langle x\,,\,T^{-1}(z)\big\rangle\,,\qquad x,z\in H.$$

Folglich ist $T^{-1}=T^*$ und somit $T^*T=T\,T^*=I$.
(c) einfach, siehe Übung 2. ∎

Man beachte, dass jeder isometrische Operator beschränkt ist mit der Norm 1. Im Falle $H=\mathbb{C}^n$ bezeichnet man die unitäre Gruppe mit $\mathrm{U}(n)$. Im Falle $H=\mathbb{R}^n$ (mit der euklidischen Metrik) bilden die unitären Operatoren die *orthogonale* Gruppe $\mathrm{O}(n)$.

Beispiel V.3 (a) Explizit gilt $\mathrm{U}(n)=\{A\in\mathbb{C}^{n\times n}\mid A^*A=AA^*=E_n\}$ und $\mathrm{O}(n)=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid A^\top A=AA^\top=E_n\}$, wobei E_n die n-reihige Einheitsmatrix sei.
(b) $H=\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Der Verschiebungsoperator V_a aus Beispiel 1 (b) ist unitär, denn $V_aV_b=V_{a+b}$ und $V_a^*=V_{-a}$. In der Tat gilt für alle $f,g\in H$

$$\big\langle V_af\,,\,g\big\rangle=\int_{\mathbb{R}}V_af(t)g(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}f(t-a)g(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}f(t)g(t+a)\,\mathrm{d}t=\big\langle f\,,\,V_{-a}(g)\big\rangle\,.$$

(c) Der Multiplikationsoperator aus Beispiel 1 (c), $T_g f = g f$ ist genau dann unitär, selbstadjungiert bzw. positiv, wenn $\left|g(t)\right| = 1$, $g(t) \in \mathbb{R}$ bzw. $g(t) \geq 0$ für alle t.
(f) $H = \ell_2$. Der Rechts-Shift $S((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$ ist isometrisch aber nicht unitär, denn S ist nicht surjektiv; die Folge $(1,0,0,\dots)$ liegt nicht im Bild von S. Der adjungierte Operator S^* (Links-Shift) ist nicht injektiv, denn $S^*(1,0,\dots) = 0$; also erst recht nicht isometrisch.
(h) **Die Fouriertransformation** Für $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ definieren wir

$$(\mathscr{F} f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist definiert, da $\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} f(x)\right| = \left|f(x)\right|$ für alle $x, t \in \mathbb{R}$ und $\int_{\mathbb{R}} \left|f\right| \mathrm{d}x < \infty$.
Es sei nun $\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|t^n f^{(k)}(t)\right| < \infty,\ \forall\, n, k \in \mathbb{Z}_+\}$. Dieser Funktionenraum $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ heißt *Schwartzraum* nach dem französischen Mathematiker Laurent Schwartz (1915 – 2002, Fields-Medaille). Man nennt die Elemente von $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ auch die *schnell fallenden Funktionen*, da sie schneller als jede rationale Funktion $1/x^n$ im Unendlichen gegen Null streben.
Es gilt $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, zum Beispiel ist $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Später werden wir zeigen, dass $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ eine Bijektion ist, die das Skalarprodukt auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ und die Norm erhält:

$$\left\|\mathscr{F}(f)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = \left\|f\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}, \quad \langle \mathscr{F}(f), \mathscr{F}(g)\rangle = \langle f, g\rangle, \quad f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Die Fouriertransformation $\mathscr{F}$ auf dem Schwartzraum hat eine eindeutige Fortsetzung zu einem unitären Operator auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Die Formel für die inverse Fouriertransformation lautet

$$(\mathscr{F}^{-1} f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

V.3.4 Orthogonale Projektionen

(a) Riesz' Erster Satz

Es sei H_1 ein abgeschlossener linearer Teilraum. Nach Satz V.1.10 (Riesz' Erster Satz) hat jedes $x \in H$ eine eindeutige orthogonale Zerlegung $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in H_1$ und $x_2 \in H_1^\perp$. Die Abbildung $P_{H_1} : H \to H$, $P_{H_1}(x) = x_1$, ist linear.
In der Tat, sei $y = y_1 + y_2$ eine weiter Zerlegung eines Vektors $y \in H$ mit $y_1 \in H_1$ und $y_2 \in H_1^\perp$, so gilt $P(x+y) = P((x_1+y_1)+(x_2+y_2)) = x_1 + y_1 = P(x) + P(y)$. außerdem gilt $P(\lambda x) = P(\lambda x_1 + \lambda x_2) = \lambda x_1 = \lambda P(x)$. Somit ist P linear. Die Beschränktheit wird in ÜA 2.4 gezeigt. Somit ist $P_{H_1} \in \mathscr{L}(H)$. P_{H_1} heißt die *orthogonale Projektion* von H auf H_1.
Offenbar ist $H_1 = P_{H_1}(H)$ das Bild von H und $P_{H_1}(H_1^\perp) = \{0\}$, denn die orthogonalen Zerlegungen von Elementen aus H_1 bzw. aus $H_1^\perp$ lauten $x_1 = x_1 + 0$ bzw. $x_2 = 0 + x_2$.
Beispiel für einen nicht-abgeschlossenen Teilraum von ℓ_2: Es sei φ der Raum der finiten Folgen $\varphi = \{(x_n) \mid x_k = 0 \quad \text{für fast alle } k\}$. Dann gilt $\varphi^\perp = \{0\}$ – es gibt keine ℓ_2-Folge, die auf allen finiten Folgen orthogonal ist, denn $\langle x, \mathrm{e}_k\rangle = 0$ für alle k impliziert $x_k = 0$, also $x = 0$. Es gilt also $\varphi \oplus \varphi^\perp \neq \ell_2$.

Insbesondere ist P_{H_1} genau dann surjektiv, wenn $H_1 = H$; In diesem Fall ist $P_H = I$ die Identität auf H. Umgekehrt ist $P_{H_1} = 0$ genau dann, wenn $H_1 = \{0\}$.
Wir zeigen die Beschränktheit von P_{H_1}. Für alle $x \in H$, $x = x_1 + x_2$, gilt

$$\left\| P_{H_1}(x) \right\|^2 = \|x_1\|^2 \le \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2 ;$$

die letzte Gleichung ist der Pythagoras, der wegen $x_1 \perp x_2$ anwendbar ist. Also ist $\left\| P_{H_1} \right\| \le 1$. Falls $H_1 \neq \{0\}$, gibt es einen von Null verschiedenen Vektor $x_1 \in H_1$ mit $P_{h_1}(x_1) = x_1$, also $\left\| P_{H_1}(x_1) \right\| = \|x_1\|$. Somit gilt $\left\| P_{H_1} \right\| = 1$.
Wir kommen zu einer *algebraischen* Beschreibung der orthogonalen Projektionen.

Satz V.5 *Ein linearer Operator $P \in \mathscr{L}(H)$ ist eine orthogonale Projektion genau dann, wenn $P^2 = P$ (Idempotenz) und $P^* = P$ (Selbstadjungiertheit).*
In diesem Falle ist $H_1 = \{x \in H \mid P(x) = x\}$ der abgeschlossene Teilraum von H, auf den projiziert wird.

Beweis. $\rightarrow$ **in der Übung.** Es sei $P = P_{H_1}$ die orthogonale Projektion auf H_1. Da P auf H_1 die Identität ist, gilt für alle $x \in H$, dass $P^2(x) = P(x_1) = x_1 = P(x)$; hierbei sei $x = x_1 + x_2$ die orthogonale Zerlegung von x bezüglich $H_1 \oplus H_1^\perp$. Also $P^2 = P$. Sei ferner $y = y_1 + y_2$ die entsprechende Zerlegung von $y \in H$. Dann ist

$$\langle P(x), y \rangle = \langle x_1 , y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1 , y_1 \rangle + \underbrace{\langle x_1 , y_2 \rangle}_{=0} = \langle x_1 , y_1 \rangle = \langle x_1 + x_2 , y_1 \rangle = \langle x , P(y) \rangle ,$$

also, $P^* = P$.
$\leftarrow$. Angenommen, es ist $P^2 = P = P^*$. wir setzen $H_1 = \{x \mid P(x) = x\} = \operatorname{Ker}(P - I)$. Zunächst ist für $P \neq 0$ der Raum H_1 nicht nur der Nullvektor, denn es gilt ja wegen $P^2 = P$ für alle x, $P(P(x)) = P(x)$ — der Bildraum von P ist also der Eigenraum zum Eigenwert 1 von P. Somit gilt $P(H) \subset H_1$. Da umgekehrt für alle $z \in H_1$ gilt $P(z) = z$, ist $H_1 \subset P(H)$ und somit $H_1 = P(H)$. Da P stetig ist, ist H_1 ein abgeschlossener Teilraum von H, $H_1 = (P - I)^{-1}(\{0\})$. Nach dem Rieszschen Zerlegungssatz, Satz V.1.10 , gilt $H = H_1 \oplus H_1^\perp$. Wir werden zeigen, dass $P = P_{H_1}$ die orthogonale Projektion auf H_1 ist. Dazu müssen wir zeigen, dass für alle $x \in H$ gilt, $P(x) = x_1$. Wegen $P^2 = P$ ist $P(P(x)) = P(x)$ für alle x, also ist $P(x) \in H_1$. Wir müssen nur noch zeigen, dass $x - P(x) \in H_1^\perp$, dann ist $x = P(x) + (x - P(x))$ die gesuchte Orthogonalzerlegung von x. Sei $z \in H_1$, dann gilt

$$\langle x - P(x), z \rangle = \langle x , z \rangle - \langle P(x), z \rangle = \langle x , z \rangle - \langle x , P(z) \rangle = \langle x , z \rangle - \langle x , z \rangle = 0.$$

Folglich ist $x - P(x) \in H_1^\perp$ und der Beweis ist komplett. ∎

Beispiel V.4 (a) Es sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein NOS in H (ein normiertes Orthogonalsystem, also $\langle x_i , x_k \rangle = \delta_{ik}$ für alle i, k). Dann definiert

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x , x_k \rangle \, x_k, \quad x \in H,$$

die orthogonale Projektion $P = P_{H_1} : H \to H$ auf $H_1 = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. In der Tat sind alle Elemente von H_1 invariant unter P, denn für die Basiselemente gilt $P(x_m) = \sum_{k=1}^n \langle x_m\,,\, x_k\rangle\, x_k = x_m$, hieraus folgt $P(x) = x$ für alle $x \in H_1$. Außerdem gilt für alle $y \in H_1^\perp$ sofort $P(y) = 0$. Wegen der Linearität von P ist daher für alle $z \in H$ mit orthogonaler Zerlegung $z = z_1 + z_2$, $P(z) = P(z_1 + z_2) = P(z_1) + P(z_2) = z_1$. Somit gilt $P = P_{H_1}$.
(b) Es sei $H = \mathrm{L}^2([0,1] \cup [2,3])$, $g \in \mathrm{C}([0,1] \cup [2,3])$. Für $f \in H$ betrachten wir den Multiplikationsoperator $T_g f = g f$. Es ist $T_g = (T_g)^*$ genau dann, wenn $g(t) \in \mathbb{R}$ für alle t. Mehr noch, T_g ist idempotent und damit eine orthogonale Projektion, genau dann, wenn $g(t)^2 = g(t)$. Somit hat man $g(t) = 0$ oder $g(t) = 1$. Da wir immer g als stetig vorausgesetzt haben bleiben nur 4 Fälle: $g_1 = 0$, $g_2 = 1$, $g_3 = \chi_{[0,1]}$ und $g_4 = \chi_{[2,3]}$.
Im Falle von g_3 kann der Projektionsraum H_1 identifiziert werden mit $\mathscr{L}^2([0,1])$, da $f \in H_1$ genau dann, wenn $T_g f = f$ bzw. wenn $g f = f$ also $f(t) = 0$ für alle $t \in [2,3]$.

(b) Eigenschaften orthogonaler Projektionen

In diesem Abschnitt sei H ein Hilbertraum, H_1, H_2 seien abgeschlossenen Teilräume und P_1 und P_2 seien die orthogonalen Projektionen auf H_1 bzw. H_2.
Ohne vollständige Beweise, diese sind im Anhang I zu finden, fassen wir die wichtigsten Eigenschaften von orthogonalen Projektionen zusammen.

Bemerkung V.2 (i) Die folgenden drei Eigenschaften sind äquivalent:

(a) $P_1 + P_2$ ist eine Orthoprojektion. (b) $P_1 P_2 = 0$. (c) $H_1 \perp H_2$.

(ii) Die beiden folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

(a) $P_1 P_2$ ist eine orthogonale Projektion. (b) $P_1 P_2 = P_2 P_1$.

In diesem Falle ist $P_1 P_2$ die Orthoprojektion auf $H_1 \cap H_2$.
(iii) Die folgenden sechs Eigenschaften sind untereinander äquivalent.

(a) $H_1 \subseteq H_2$, (d) $P_1 \le P_2$,
(b) $P_1 P_2 = P_1$, (c) $P_2 P_1 = P_1$,
(e) $P_2 - P_1$ ist eine Orthoprojektion, (f) $\|P_1(x)\| \le \|P_2(x)\|$, $x \in H$.

Beweis. von (i), (a) $\longleftrightarrow$ (b). Sei $P_1 + P_2$ eine Orthoprojektion, so ist diese Summe idempotent, das heißt,

$$P_1 + P_2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2^2 = P_1 + P_2 + P_1 P_2 + P_2 P_1.$$

Also gilt $P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0$. Multipliziert man diese Gleichung zunächst von rechts mit P_1, so hat man $P_1 P_2 P_1 + P_2 P_1 = 0$ bzw. $P_2 P_1 = -P_1 P_2 P_1$. Multipliziert man sie aber von links mit P_1, so hat man analog $P_1 P_2 = -P_1 P_2 P_1$. Addiert man diese beiden Gleichungen und beachtet $P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0$, so hat man $P_1 P_2 P_1 = P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$.
Ist umgekehrt $P_1 P_2 = 0$, so folgt $0 = 0^* = (P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1$, also folgt $(P_1 + P_2)^2 = (P_1 + P_2)$ und $(P_1 + P_2)^* = P_1 + P_2$ und $P_1 + P_2$ ist somit Projektor. ∎

V.3.5 Spektrum und Resolvente

Es sei $T \in \mathscr{L}(H)$ ein beschränkter linearer Operator auf H.

(a) Definitionen und Beispiele

Definition V.5 (a) Die *Resolventenmenge* von T, bezeichnet mit $\rho(T)$, ist die Menge aller komplexen $\lambda \in \mathbb{C}$ so dass ein beschränkter linearer Operator $R_\lambda(T) \in \mathscr{L}(H)$ existiert, der auf ganz H definiert ist und für den gilt

$$R_\lambda(T)(T-\lambda I) = (T-\lambda I)R_\lambda(T) = I,$$

m.a.W. $T-\lambda I$ hat einen beschränkten (stetigen) inversen Operator $R_\lambda(T)$. Wir nennen $R_\lambda(T)$ die *Resolvente* von T an der Stelle λ.
(b) Die Komplementmenge $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ heißt *Spektrum* von T.
(c) $\lambda \in C$ heißt *Eigenwert* von T falls ein von Null verschiedener Vektor $x \neq 0$ existiert, ein *Eigenvektor*, so dass $T(x) = \lambda x$. Die Menge der Eigenwerte von T bezeichnet man als *Punktspektrum* $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ von T.

Bemerkung V.3 (a) Äquivalent zu „x ist Eigenvektor zum Eigenwert λ“ ist, dass $(T-\lambda I)x = 0$ bzw. $x \in \mathrm{Ker}(T-\lambda I)$.
(b) Das Punktspektrum ist Teilmenge des Spektrums, $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subseteq \sigma(T)$. Beweis. Angenommen, λ sei ein Eigenwert von T mit Eigenvektor y, der nicht zum Spektrum gehört. Dann existiert ein beschränkter linearer Operator $R_\lambda(T) \in \mathscr{L}(H)$ mit

$$y = R_\lambda(T)(T-\lambda I)(y) = R_\lambda(T)(0) = 0;$$

dies widerspricht aber der Definition des Eigenvektors (immer von Null verschieden). Folglich liegt jeder Eigenwert im Spektrum.
(c) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ ist äquivalent zu $T-\lambda I$ ist nicht injektiv (der Kern ist ungleich Null). Es kann auch der Fall eintreten, dass $T-\lambda I$ nicht surjektiv ist, auch hier gilt dann $\lambda \in \sigma(T)$ (vgl. Beispiel V.5 (b) unten).

Beispiel V.5 (a) $H = \mathbb{C}^n$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Da H endlichdimensional ist, ist A surjektiv genau dann, wenn A injektiv ist, genau dann, wenn A bijektiv ist. Folglich ist $A-\lambda E$ genau dann invertierbar, wenn λ kein Eigenwert ist. Die Begriffe Spektrum und Punktspektrum fallen hier zusammen: $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A)$.
(b) $H = \mathrm{L}^2([0,1])$. $(Tf)(x) = xf(x)$. Dieser Multiplikationsoperator besitzt *keinen* Eigenwert. Wir haben

$$\boldsymbol{\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \varnothing.}$$

Angenommen, λ ist ein Eigenwert von T mit Eigenfunktion $f \in \mathscr{L}^2([0,1])$ Dann ist $T(f) = \lambda f$ im $\mathscr{L}^2$ also $xf(x) = \lambda f(x)$ bzw $(x-\lambda)f(x) = 0$ fast überall auf $[0,1]$. Da aber $x-\lambda \neq 0$ fast überall, muss $f(x) = 0$ fast überall auf $[0,1]$ sein. Das heißt aber $f = 0$ in H was der Definition des Eigenvektors widerspricht.
Es gilt ferner

$$\boldsymbol{\mathbb{C} \setminus [0,1] \subseteq \rho(T) \Longleftrightarrow \sigma(T) \subset [0,1].}$$

Es sei $\lambda \notin [0,1]$. Da $x-\lambda \neq 0$ für alle $x \in [0,1]$, ist die Funktion $g(x) = \dfrac{1}{x-\lambda}$ eine stetige und damit beschränkte Funktion auf $[0,1]$.
Folglich ist der Multiplikationsoperator

$$(R_\lambda f)(x) = \frac{1}{x-\lambda} f(x)$$

ein beschränkter linearer Operator auf H (siehe ÜA 2.2). Er ist in der Tat der zu $(T-\lambda I)$ inverse Operator, denn für alle $f \in H$ ist

$$(T-\lambda I)\left(\frac{1}{x-\lambda} f(x)\right) = (x-\lambda)\left(\frac{1}{x-\lambda} f(x)\right) = f(x).$$

Schließlich zeigen wir, dass tatsächlich alle Punkte des Einheitsintervalls zum Spektrum gehören:

$$\boldsymbol{\sigma(T) = [0,1].}$$

Angenommen, es existiert ein $\lambda \in \rho(T) \cap [0,1]$. Dann gibt es die Resolvente am Punkt λ $R_\lambda \in \mathscr{L}(H)$ mit

$$R_\lambda(T-\lambda I) = I. \tag{V.12}$$

Nach ÜA 2.2 und der 2. Übung ist die Operatornorm des Multiplikationsoperators T_g kleiner oder gleich $\left\|g\right\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}\left|g(x)\right|$. Wir wählen $f_\varepsilon = \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}$. Da $\chi_M = \chi_M^2$, für alle M, gilt

$$\left\|(T-\lambda I)f_\varepsilon\right\| = \left\|(x-\lambda)f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x)\right\| \leq \sup_{x\in[0,1]}\left|(x-\lambda)f_\varepsilon(x)\right| \left\|f_\varepsilon\right\|.$$

Andererseits ist aber

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|(x-\lambda)\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(x)\right| = \sup_{\lambda-\varepsilon<x<\lambda+\varepsilon} |x-\lambda| = \varepsilon.$$

Folglich ist

$$\left\|(T-\lambda I)f_\varepsilon\right\| \leq \varepsilon \left\|f_\varepsilon\right\|.$$

Setzt man nun f_ε in (V.12) ein, so hat man

$$\left\|f_\varepsilon\right\| = \left\|R_\lambda(T-\lambda I)f_\varepsilon\right\| \leq \|R_\lambda\| \left\|(T-\lambda I)f_\varepsilon\right\| \leq \|R_\lambda\|\, \varepsilon \left\|f_\varepsilon\right\|$$

was zur Folge hat, dass $\|R_\lambda\| \geq 1/\varepsilon$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Beschränktheit von R_λ da $\varepsilon > 0$ beliebig klein ist.

(b) Eigenschaften des Spektrums

Lemma V.6 *Es sei $T \in \mathscr{L}(H)$. Dann gilt*

$$\sigma(T^*) = \sigma(T)^*, \quad \textit{(Komplexe Konjugation)} \quad \rho(T^*) = \rho(T)^*.$$

Beweis. Es sei $\lambda \in \rho(T)$. Dann existiert die Resolvente $R_\lambda(T) \in \mathscr{L}(H)$, so dass

$$\begin{aligned}
R_\lambda(T)(T-\lambda I) &= (T-\lambda I)R_\lambda(T) = I \\
(R_\lambda(T)(T-\lambda I))^* &= ((T-\lambda I)R_\lambda)^* = I \\
(T^* - \overline{\lambda} I)R_\lambda(T)^* &= R_\lambda(t)^*(T^* - \overline{\lambda} I) = I.
\end{aligned}$$

Das bedeutet aber, dass $R_{\overline{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*$ ebenfalls ein beschränkter linearer Operator ist. Also ist $\rho(T^*) \subseteq \big(\rho(T)\big)^*$. Da $(T^{**} = T)$, folgt auch die umgekehrte Inklusion. Folglich ist $\rho(T^*) = \rho(T)^*$.
Da das Spektrum das Komplement der Resolventenmenge ist, folgt die analoge Gleichheit fürs Spektrum. ∎

Für alle T und S und λ und μ in der entsprechenden Resolventenmenge gilt (ohne Beweis):

$$\begin{aligned}
&R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T) = (\lambda-\mu)R_\mu(T)R_\lambda(T), \\
&R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(S-T)R_\lambda(S).
\end{aligned}$$

Satz V.7 (a) *$\rho(T)$ ist offen und $\sigma(T)$ ist abgeschlossen.*
(b) *Wenn $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $|\lambda - \lambda_0| < \left\|R_{\lambda_0}(T)\right\|^{-1}$, dann ist $\lambda \in \rho(T)$ und es gilt*

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}.$$

(c) *Wenn $|\lambda| > \|T\|$, dann liegt λ in der Resolventenmenge, $\lambda \in \rho(T)$ und*

$$R_\lambda(T) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n.$$

Beweis. (a) folgt aus (b), denn mit jedem $\lambda_0 \in \rho(T)$ ist auch eine kleine Umgebung in $\rho(T)$; die Resolventenmenge ist also offen.
(b) Zur Abkürzung schreiben wir einfach R_{λ_0} anstelle von $R_{\lambda_0}(T)$. Wir setzen $q := |\lambda - \lambda_0| \left\|R_{\lambda_0}(T)\right\|$ und haben somit $q \in (0,1)$. Daher gilt, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n \left\|R_{\lambda_0}\right\|^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left\|R_{\lambda_0}\right\| = \frac{\left\|R_{\lambda_0}\right\|}{1-q}$$

absolut konvergiert. Wir setzten $T_n = (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}$. Nach Übungsaufgabe 3.4 (a) und der Vollständigkeit von $\mathscr{L}(H)$ konvergiert wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\| < \infty$ dann auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$. Folglich konvergiert in der Operatornorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}$$

in $\mathscr{L}(H)$ gegen einen beschränkten linearen Operator, sagen wir, B. Für dieses B gilt:

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)B &= (T-\lambda_0 I)B-(\lambda-\lambda_0)B\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n(T-\lambda_0 I)R_{\lambda_0}^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{n+1}R_{\lambda_0}^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{n+1}R_{\lambda_0}^{n+1}\\ &= (\lambda-\lambda_0)^0 R_{\lambda_0}^0 = I.\end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass $B(T-\lambda I)=I$. Also ist $R_\lambda(T)=B$.
(c) Wegen $|\lambda|>\|T\|$ und daher $|\lambda|^{-1}\|T\|<1$, konvergiert die Reihe in der Operatornorm gegen einen beschränkten linearen Operator, etwa gegen C:

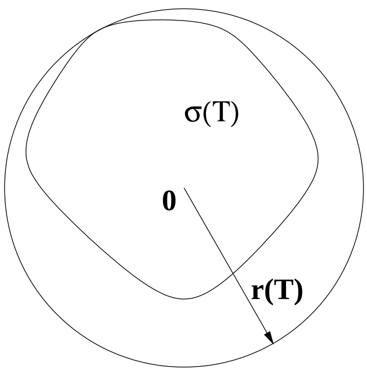
$$C=-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n.$$

Es gilt

$$(T-\lambda I)C=-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}T^n=\lambda^0T^0=I.$$

Ähnlich zeigt man, dass $C(T-\lambda I)=I$; also ist $R_\lambda(T)=C$. ■

Bemerkung V.4 (a) Nach (b) ist die Funktion $R_\lambda(T)$ als Funktion von $\lambda\in\rho(T)\subset\mathbb{C}$ komplexdifferenzierbar mit Werten in $\mathscr{L}(H)$. Da $\|R_\lambda(T)\|$, $\lambda\in\rho(T)$ beschränkt und nicht konstant ist, folgt nach dem Satz von Liouville, dass $\rho(T)\neq\mathbb{C}$. Folglich ist das Spektrum jedes beschränkten linearen Operators nicht leer, $\sigma(T)\neq\varnothing$.
(b) Falls $\|T\|<1$, ist $T-I$ invertierbar mit $(T-I)^{-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}T^n$ (Neumannsche Reihe).



(c) Satz V.7 (c) bedeutet: Wenn $\lambda\in\sigma(T)$, dann ist $|\lambda|\leq\|T\|$. Das heißt, dass das Spektrum immer im Kreis um 0 mit Radius $\|T\|$ enthalten ist. Im Allgemeinen gibt es aber einen kleineren Kreis vom Radius $r(T)$ um 0, der das Spektrum schon ganz enthält. Diese Zahl $r(T)$ nennt man den *Spektralradius* von T und es ist nach Definition der kleinste Radius, so dass der Kreis um Null mit diesem Radius das Spektrum enthält:

$$r(T)=\sup\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\sigma(T)\}.$$

(d) Aus $\lambda\in\sigma(T)$ folgt das $\lambda^n\in\sigma(T^n)$ für alle natürlichen Zahlen $n\in\mathbb{N}$. Angenommen $\lambda^n\in\rho(T^n)$, dann existiert ein beschränkter linearer Operator B mit $B(T^n-\lambda^n)=(T^n-\lambda^n)B=I$. Somit ist,

$$I=B(T^n-\lambda^n)=B\sum_{k=0}^{n}T^k\lambda^{n-1-k}(T-\lambda)=(T-\lambda)CB=I;$$

und damit $\lambda \in \rho(T)$ im Widerspruch zur Annahme, dass $\lambda \in \sigma(T)$.
Hieraus folgt insbesondere, dass $|\lambda|^n \leq \|T^n\|$ bzw. $|\lambda| \leq \|T^n\|^{1/n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\} \leq \|T^n\|^{1/n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $r(T) \leq \inf\{\|T^n\|^{1/n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Es gilt sogar Gleichheit.

Satz V.8 *Es sei $T \in \mathscr{L}(H)$. Dann gilt für den Spektralradius $r(T)$ von T,*

$$r(T) = \inf\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{V.13}$$

Der Beweis ist im Anhang.

V.3.6 Das Spektrum von selbstadjungierten Operatoren

Satz V.9 *Es sei $T = T^*$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Dann gilt $\lambda \in \rho(T)$ genau dann, wenn es ein $C > 0$ gibt mit*

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq C\|x\|, \qquad \forall x \in H.$$

Beweis. Angenommen, $\lambda \in \rho(T)$. Dann existiert die (von 0 verschiedene) beschränkte Resolvente bei λ, nämlich $R_\lambda(T)$, sodass

$$\|x\| = \|R_\lambda(T)(T - \lambda I)x\| \leq \|R_\lambda(T)\| \, \|(T - \lambda I)x\|.$$

Folglich ist

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq \frac{1}{\|R_\lambda(T)\|}\|x\|, \qquad x \in H.$$

Daher kann man $C = 1/\|R_\lambda(T)\|$ wählen und die Bedingung des Satzes ist erfüllt.
Sei nun umgekehrt die Bedingung des Satzes erfüllt. Wir zeigen in 3 Schritten, dass $T - \lambda I$ einen beschränkten inversen Operator hat, der auf ganz H definiert ist.
1.Schritt. $T - \lambda I$ ist injektiv. Angenommen, es gibt $x_1, x_2 \in H$ mit $(T - \lambda)x_1 = (T - \lambda)x_2$. Somit gilt

$$0 = \|(T - \lambda)(x_1 - x_2)\| \geq C\|x_1 - x_2\|,$$

und damit $\|x_1 - x_2\| = 0$ also $x_1 = x_2$. Somit ist $T - \lambda I$ injektiv.
2. Schritt $T - \lambda I$ hat ein abgeschlossenen Bildraum $H_1 = (T - \lambda I)H$.
Angenommen, eine Folge $y_n = (T - \lambda I)x_n$, $x_n \in H$, konvergiert gegen einen gewissen Vektor $y \in H$. Wir wollen zeigen: $y \in H_1$. Natürlich ist (y_n) eine Cauchy-Folge, so dass $\left\|y_m - y_n\right\| \to 0$ für $m, n \to \infty$. Nach der Voraussetzung des Satzes gibt es ein $C > 0$ mit

$$\left\|y_m - y_n\right\| = \|(T - \lambda I)(x_n - x_m)\| \geq C\|x_n - x_m\|.$$

Somit ist auch (x_n) eine Cauchy-Folge in H. Da H vollständig ist, konvergiert $x_n \to x$ für ein gewisses $x \in H$. Da $T - \lambda I$ stetig ist, konvergiert die Folge

$$y_n = (T - \lambda I)x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (T - \lambda I)x.$$

gegen $(T - \lambda I)x$. Somit liegt $y = (T - \lambda I)x$ in H_1 und H_1 ist abgeschlossen.

3. Schritt. $H_1 = H$. Nach dem Ersten Rieszschen Satz ist $H = H_1 \oplus H_1^\perp$. Wir müssen nur noch zeigen, dass $H_1^\perp = \{0\}$. Sei dazu $u \in H_1^\perp$, also, wegen $T^* = T$,

$$0 = \langle (T-\lambda I)x\,,\,u\rangle = \left\langle x\,,(T-\overline{\lambda}I)u\right\rangle, \quad \text{für alle} \quad x \in H.$$

Dies zeigt, dass $(T-\overline{\lambda}I)u = 0$ und somit $T(u) = \overline{\lambda}u$. Folglich ist

$$\langle T(u),\,u\rangle = \overline{\lambda}\,\langle u\,,\,u\rangle\,.$$

Wegen $T = T^*$ jedoch und Bemerkung V.1 (d) folgt, dass $\overline{\lambda} = \lambda$; also ist λ reell. Folglich gilt $(T-\lambda I)u = 0$. Wegen der Injektivität von $T-\lambda I$ ist damit $u = 0$. Also gilt $H_1 = H$.
somit haben wir gezeigt, dass ein linearer, auf ganz H definierter Operator $S = (T-\lambda I)^{-1}$ existiert. Wir zeigen seine Beschränktheit: Wegen

$$\left\|y\right\| = \left\|(T-\lambda I)S(y)\right\| \geq C\left\|S(y)\right\|,$$

ist S beschränkt mit $\|S\| \leq 1/C$. Also ist $S = R_\lambda(T)$ die Resolvente zu T bei λ. ■

(a) Man beachte die folgenden Überlegungen, dass für eine reellwertige, beschränkte Funktion $f(x,y)$ gilt

$$\sup_{x,y} f(x,y) = \sup_x(\sup_y f(x,y)) = \sup_y(\sup_x f(x,y)).$$

(b) Insbesondere ist $\|x\| = \sup\limits_{\|y\|\leq 1} \left|\langle x\,,\,y\rangle\right|$ da nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt $\sup_{\|y\|\leq 1}\left|\langle x\,,\,y\rangle\right| \leq \sup_{\|y\|\leq 1}\|x\|\left\|y\right\| = \|x\|$ und an der Stelle $y = x/\|x\|$ wird das Supremum angenommen.
(c) Ferner ist $\|T(x)\| = \sup\limits_{\|y\|\leq 1}\left|\langle T(x),\,y\rangle\right|$, sodass

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\sup_{\|y\|\leq 1}\left|\langle T(x),\,y\rangle\right| = \sup_{\|x\|\leq 1,\,\|y\|\leq 1}\left|\langle T(x),\,y\rangle\right| = \sup_{\|y\|\leq 1}\sup_{\|x\|\leq 1}\left|\langle T(x),\,y\rangle\right|$$

Im Falle eines selbstadjungierten Operators können wir dies verallgemeinern.

Satz V.10 *Es sei $T = T^* \in \mathscr{L}(H)$. Dann gilt*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1}|\langle T(x),\,x\rangle|\,. \tag{V.14}$$

Beweis. Es sei $C = \sup\limits_{\|x\|\leq 1}|\langle T(x),\,x\rangle|$. Nach der CSU ist dann $|\langle T(x),\,x\rangle| \leq \|T\|\,\|x\|^2$, sodass $C \leq \|T\|$. Für jedes positive reelle $\alpha > 0$ ist

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|^2 = \langle T(x),\,T(x)\rangle = \langle T^2(x),\,x\rangle &= \frac{1}{4}\left(\langle T(\alpha x + \alpha^{-1}T(x)),\,\alpha x + \alpha^{-1}T(x)\rangle - \right.\\
&\quad \left.= -\langle T(\alpha x - \alpha^{-1}T(x)),\,\alpha x - \alpha^{-1}T(x)\rangle\right)\\
&\leq \frac{1}{4}\left(C\left\|\alpha x + \alpha^{-1}T(x)\right\|^2 + C\left\|\alpha x - \alpha^{-1}T(x)\right\|^2\right)\\
&\underset{\text{P.I.}}{=} \frac{C}{4}\left(2\|\alpha x\|^2 + 2\left\|\alpha^{-1}T(x)\right\|^2\right) = \frac{C}{2}\left(\alpha^2\|x\|^2 + \alpha^{-2}\|T(x)\|^2\right).
\end{aligned}$$

Setzt man $\alpha^2 = \|T(x)\| / \|x\|$ ein, so hat man

$$= \frac{C}{2} (\|T(x)\| \|x\| + \|x\| \|T(x)\|)$$

woraus $\|T(x)\| \le C \|x\|$ folgt. Also gilt $\|T\| = C$. ■

Es seien $m = \inf_{\|x\|=1} \langle T(x), x\rangle$ und $M = \sup_{\|x\|=1} \langle T(x), x\rangle$ die *untere* bzw. *obere* Schranke von T. Dann gilt:

$$\sup_{\|x\|\le 1} |\langle T(x), x\rangle| = \max\{|m|, M\} = \|T\|,$$

und

$$m\|x\|^2 \le \langle T(x), x\rangle \le M\|x\|^2, \quad \text{für alle} \quad x \in H.$$

Folgerung V.11 *Es sei $T = T^* \in \mathscr{L}(H)$. Dann gilt*

$$\sigma(T) \subset [m, M].$$

V.4 Anhang I: Orthogonale Projektionen

Beweis von Bemerkung V.2. (i) (a) → (b). Sei $P_1 + P_2$ eine Projektion. Dann ist

$$(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 = P_1 + P_2 + P_1P_2 + P_2P_1 \stackrel{!}{=} P_1 + P_2,$$

also $P_1P_2 + P_2P_1 = 0$. Multiplikation von links und rechts mit P_1 liefert

$$P_1P_2 + P_1P_2P_1 = 0 = P_1P_2P_1 + P_2P_1.$$

Hieraus folgt $P_1P_2 = P_2P_1$ und letztlich $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.
(b) → (c). Seien $x_1 \in H_1$ und $x_2 \in H_2$. Dann ist

$$0 = \langle P_1P_2(x_2), x_1\rangle = \langle P_2(x_2), P_1(x_1)\rangle = \langle x_2, x_1\rangle.$$

Also ist $H_1 \perp H_2$.
(c) → (b). Seien $x, z \in H$ beliebig. Dann ist

$$\langle P_1P_2(x), z\rangle = \langle P_2(x), P_1(z)\rangle = \langle x_2, z_1\rangle = 0;$$

Also $P_1P_2(x) = 0$ und folglich $P_1P_2 = 0$. Die selbe Argumentation funktioniert auch für $P_2P_1 = 0$.
(b) → (a). Da aus $P_1P_2 = 0$ folgt das $P_2P_1 = 0$ (via $H_1 \perp H_2$),

$$(P_1 + P_2)^* = P_1^* + P_2^* = P_1 + P_2,$$
$$(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 = P_1 + 0 + 0 + P_2.$$

■

Beweis von Bemerkung V.2. (ii) (b) $\to$ (a). $(P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1 = P_1P_2$, nach Voraussetzung. Außerdem gilt $(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1P_1P_2P_2 = P_1P_2$, wodurch diese Richtung vollständig ist.
(a) $\to$ (b). $P_1P_2 = (P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1$.
Offensichtlich gilt $P_1P_2(H) \subseteq H_1$ und $P_2P_1(H) \subseteq H_2$; also $P_1P_2(H) \subseteq H_1 \cap H_2$. Andererseits gilt für $x \in H_1 \cap H_2$ das $P_1P_2x = x$. Dies zeigt $P_1P_2(H) = H_1 \cap H_2$. ■

Beweis von Bemerkung V.2. (iii) Wir zeigen (d) $\to$ (c). Aus $P_1 \le P_2$ folgern wir das $I - P_1 \le I - P_2$. Hierbei sind $I - P_1$ und $I - P_2$ orthogonale Projektionen auf $H_1^\perp$ beziehungsweise $H_2^\perp$. Also gilt für alle $x \in H$:

$$\begin{aligned}
\|(I-P_2)P_1(x)\|^2 &= \langle (I-P_2)P_1(x), (I-P_2)P_1(x)\rangle \\
&= \Big\langle (I-P_2)^*(I-P_2)P_1(x), P_1(x)\Big\rangle = \langle (I-P_2)P_1(x), P_1(x)\rangle \\
&\le \langle (I-P_1)P_1(x), P_1(x)\rangle = \langle P_1(x) - P_1(x), P_1(x)\rangle = \langle 0, P_1(x)\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Also $\|(I-P_2)P_1(x)\|^2 = 0$, woraus $(I-P_2)P_1 = 0$ und letztlich $P_1 = P_2P_1$ folgt. ■

V.5 Anhang II: Kompakte, selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum

Beweis von Satz V.8. Aus der Theorie über Potenzreihen wissen wir das die Reihe

$$-z\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|\, z^n \tag{V.15}$$

für $|z| < R$ konvergiert und für $|z| > R$ divergiert, wobei

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|T^n\|}}. \tag{V.16}$$

Einsetzen von $z = 1/\lambda$ und unter Nutzung von Hausaufgabe 38.4, erhalten wir das

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n$$

divergiert falls $|\lambda| < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|T^n\|}$ (und konvergiert falls $|\lambda| > \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|T^n\|}$). Der Grund für die Divergenz der Potenzreihe ist, dass das Spektrum $\sigma(T)$ und der Kreis mit dem Radius $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|T^n\|}$ gemeinsame Punkte haben; also

$$r(T) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Andererseits folgt nach Bemerkung V.4 (d), $\lambda \in \sigma(T)$ das $\lambda^n \in \sigma(T^n)$; also nach Bemerkung V.4 (c),

$$|\lambda^n| \le \|T^n\| \Longrightarrow |\lambda| \le \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Bildung des Supremums über allen $\lambda \in \sigma(T)$ auf der linken Seite und des $\underline{\lim}$ über allen n auf der rechten Seite, liefert uns

$$r(T) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = r(T).$$

Also konvergiert die Folge $\sqrt[n]{\|T^n\|}$ gegen $r(T)$ wenn n gegen ∞ geht. ∎

Beweis von Folgerung V.11. Angenommen, $\lambda_0 \notin [m,M]$. Dann ist

$$C := \inf_{\mu\in[m,M]} \left|\lambda_0 - \mu\right| > 0.$$

Da $m = \inf_{\|x\|=1} \langle T(x), x\rangle$ und $M = \sup_{\|x\|=1} \langle T(x), x\rangle$ erhalten wir für $\|x\| = 1$

$$\|(T-\lambda_0 I)x\| = \|x\|\,\|(T-\lambda_0 I)x\| \underset{\text{CSU}}{\geq} |\langle (T-\lambda_0 I)x\,,\,x\rangle| = \left|\underbrace{\langle T(x)\,,\,x\rangle}_{\in[m,M]} - \lambda_0 \underbrace{\|x\|^2}_{1}\right| \geq C.$$

Hieraus folgt

$$\|(T-\lambda_0 I)x\| \geq C\,\|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in H.$$

Nach Satz V.9, $\lambda_0 \in \rho(T)$. ∎

Beispiel V.6 (a) Es sei $H = \mathrm{L}^2[0,1]$ und $g \in \mathrm{C}[0,1]$ eine reellwertige stetige Funktion; $(T_g f)(t) = g(t)f(t)$. Wenn $m = \inf_{t\in[0,1]} g(t)$ und $M = \sup_{t\in[0,1]} g(t)$, dann erhält man, dass m bzw. M die untere und oberen Schranken von T_g sind. Also gilt $\sigma(T_g) \subseteq [m,M]$. Wegen des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen, nimmt g jeden Wert in $[m,M]$ mindestens einmal an. Hieraus folgt, dass $\sigma(T_g) = [m,M]$.
(b) Es sei $T = T^* \in \mathscr{L}(H)$. Dann sind alle Eigenwerte von T reell und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen aufeinander orthogonal: *Beweis.* Die erste Behauptung folgt sofort aus Folgerung V.11. Sei nun $T(x) = \lambda x$ und $T(y) = \mu y$ mit $\lambda \neq \mu$. Dann gilt

$$\lambda \langle x\,,\,y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x\,,\,T(y)\rangle = \overline{\mu}\,\langle x\,,\,y\rangle = \mu\,\langle x\,,\,y\rangle\,.$$

Wegen $\lambda \neq \mu$, $\langle x\,,\,y\rangle = 0$. ∎

Dieser Satz gilt für beliebige *normale* Operatoren.

Kompakte Operatoren haben ähnliche Eigenschaften wie Operatoren mit endlichem Bildraum.

Definition V.6 Ein Operator $T \in \mathscr{L}(H)$ heißt *kompakt*, falls der Abschluss $\overline{T(U_1)}$ des Bildes der Einheitskugel $U_1 = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ in H kompakt ist. Mit anderen Worten, für jede Folge (x_n), $x_n \in U_1$, gibt es eine Teilfolge, so dass $T(x_{n_k})$ konvergier.

Satz V.12 *Für $T \in \mathscr{L}(H)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *T ist kompakt.*
(b) *T^* ist kompakt.*
(c) *Für alle Folgen (x_n) für die $(\langle x_n , y \rangle) \longrightarrow \langle x , y \rangle$ für alle $y \in H$ konvergiert, gilt, dass $T(x_n) \longrightarrow T(x)$.*
(d) *Es gibt eine Folge (T_n) von Operatoren mit endlichem Bildraum, sodass $\|T - T_n\| \longrightarrow 0$.*

Definition V.7 Es sei T ein Operator auf H und H_1 ein abgeschlossenener Teilraum von H. Wir nennen H_1 einen *reduzierenden Teilraum*, falls sowohl H_1 als auch $H_1^\perp$ T-invariant sind, das heißt, $T(H_1) \subset H_1$ und $T(H_1^\perp) \subset H_1^\perp$.

Satz V.13 *Es sei $T \in \mathscr{L}(H)$ normal.*
(a) *Der Eigenraum* $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ *zum Eigenwert λ ist ein reduzierender Teilraum. Es glt* $\operatorname{Ker}(T - \lambda I) = \operatorname{Ker}(T - \lambda I)^*$.
(b) *Sind λ, μ verschiedene Eigennwerte von T, dann ist* $\operatorname{Ker}(T - \lambda I) \perp \operatorname{Ker}(T - \mu I)$.

Beweis. (a) Da T normal ist, ist auch $T - \lambda$ normal. Folglich ist $\|(T - \lambda)(x)\| = \left\|(T - \lambda)^*(x)\right\|$ und damit $\operatorname{Ker}(T - \lambda) = \operatorname{Ker}(T - \lambda)^*$. Insbesondere ist $T^*(x) = \overline{\lambda}x$ für alle $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda I)$. Wir zeigen die Invarianz. Sei $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda)$; dann ist $T(x) = \lambda x \in \operatorname{Ker}(T - \alpha I)$. Analog folgt aus $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda I)^\perp$, $y \in \operatorname{Ker}(T - \lambda I)$

$$\langle T(x), y \rangle = \left\langle x , T^*(y) \right\rangle = \left\langle x , \overline{\lambda} y \right\rangle = 0.$$

Somit gilt $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)^\perp$ ist T-invariant.
(b) Es sei $T(x) = \lambda x$ und $T(y) = \mu y$. Nach (a) und nach $T^*(y) = \overline{\mu} y$ folgt

$$\lambda \langle x , y \rangle = \langle T(x), y \rangle = \left\langle x , T^*(y) \right\rangle = \langle x , \overline{\mu} y \rangle = \mu \langle x , y \rangle .$$

Also $(\lambda - \mu) \langle x , y \rangle = 0$; wegen $\lambda \neq \mu$ haben wir $x \perp y$. ■

Theorem V.14 (Spektraltheorem für kompakte selbstadjungierte Operatoren) *Es sei H ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum und $T \in \mathscr{L}(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator.*
Dann existiert eine Folge reeller Zahlen (λ_n) mit $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ und ein VNOS $\{\mathrm{e}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{f_k \mid k \in N \subset \mathbb{N}\}$ derart, dass

$$T(\mathrm{e}_n) = \lambda_n \mathrm{e}_n, \quad n \in \mathbb{N} \qquad T(f_k) = 0, \quad k \in N.$$

Außerdem ist

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x , \mathrm{e}_n \rangle \mathrm{e}_n, \quad x \in H. \tag{V.17}$$

Bemerkung V.5 (a) Da $\{\mathrm{e}_n\} \cup \{f_k\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem ist, lässt sich $x \in H$ als Fourier-Reihe schreiben

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x\,,\, \mathrm{e}_n \rangle\, \mathrm{e}_n + \sum_{k \in N} \langle x\,,\, f_k \rangle\, f_k.$$

Wendet man darauf T an, benutzt $T(\mathrm{e}_n) = \lambda_n \mathrm{e}_n$ und die Stetigkeit von T, so hat man

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x\,,\, \mathrm{e}_n \rangle\, T(\mathrm{e}_n) + \sum_{k \in N} \langle x\,,\, f_k \rangle\, \underbrace{T(f_k)}_{=0}$$

woraus (V.17) folgt. as hauptproblem ist der Nachweis der Existenz des VNOS.
(b) Im Falle $H = \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$) besagt das Theorem, dass sich jede hermitesche (symmetrische) Matrix A diagonalisieren lässt mit ausschließlich reellen Eigenwerten auf der Diagonale.