Analysis 4 für Physiker, Serie 9

Abgabe am 13. Juni 2007

1. Beweisen Sie, dass in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_{\cos(2n+1)x} = T_{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots} = \frac{\pi}{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \delta_{n\pi}.$$

4 P

2. Die Funktion

$$E(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \, \mathrm{e}^{-\dfrac{\|x\|^2}{4a^2 t}}$$

ist auf $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ definiert.
Zeigen Sie, dass $E(x,t)$ für $t > 0$ die n-dimensionale Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial E}{\partial t} = a^2 \Delta E$ erfüllt. **4 P**

3. Es sei $u = u(x)$, $u \in C^\infty(\mathbb{R})$, die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u^{(m)} + a_1(x) u^{(m-1)} + \cdots + a_m(x) u &= 0, \\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(m-2)}(0) &= 0, \\ u^{(m-1)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass für die reguläre Distribution $\mathscr{E} = T_{H\cdot u}$ gilt

$$\mathscr{E}^{(m)} + a_1(x)\mathscr{E}^{(m-1)} + \cdots + a_m(x)\mathscr{E} = \delta,$$

in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. **4 P**

4. Bestimmen Sie eine Fundamentallösung $\mathscr{E}$ des linearen gewöhnlichen Differentialoperators $L[u] = u'(x) + x\,u(x)$ mit $\operatorname{supp}\mathscr{E} \subset (-\infty, 0]$. **3 P**

5. Beweisen Sie, dass die zu $u(x,t) = \dfrac{1}{2a} H(at - |x|)$ assoziierte reguläre Distribution $\mathscr{E} = T_u$ im $\mathbb{R}^2$ eine Fundamentallösung des eindimensionalen Wellenoperators ist, d. h. $\mathscr{E}_{tt} - a^2 \mathscr{E}_{xx} = \delta_{(0,0)}$. **4 P**