Analysis 4 für Physiker, Serie 7

Abgabe am 23. Mai 2007

1. Es sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Beweisen Sie oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Wenn $x_0 \notin \operatorname{supp} f$, dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x_0) = 0$.
   (b) Wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(k)}(x_0) = 0$, dann ist $x_0 \notin \operatorname{supp} f$.

   3 P

2. Bestimmen Sie jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich D für $f\colon D \to \mathbb{R}$ und den Träger $\operatorname{supp} f$.

   (a) $f(x) = \sqrt[4]{\ln(\tan x)}$. (b) $f(x) = \chi_{[0,4\pi]}(x)\left(\sqrt{\sin(2x)} + \sqrt{\sin(3x)}\right)$. **4 P**

3. Berechnen Sie die Faltung $f * g$ für

   (a) $a \in \mathbb{R}$ sei gegeben, $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax}\chi_{[0,1]}(x)$, $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.
   (b) $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

   $$f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Hinweis. Definition 3 ist für (b) anwendbar, obwohl $f, g \notin L^1(\mathbb{R}^2)$. **4 P**

4. Gegeben sei die Hutfunktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

   $$h(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1, \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. **4 P**

5. Für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ definieren wir

   (a) $T(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(1), \quad n \in \mathbb{N}$,
   (b) $T(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0)$.
   (c) $T(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)$,
   (d) $T(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x)$.
   (e) $T(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx + 2\varphi(3) + 3\varphi'(1)$,
   (f) $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$
   (g) $T(\varphi) = \lim_{x \to \infty} \varphi(x)$,
   (h) $T(\varphi) = \sqrt{\int_0^1 \left|\varphi(x)\right|^2 dx}$.

   Welche der oben definierten Funktionale sind auf $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ wohldefiniert? Welche sind linear? Begründen Sie Ihre Antworten.

   4 P