Analysis 4 für Physiker, Serie 6

Abgabe am 16. Mai 2007

1. Gegeben sei die folgende PDGl im $\mathbb{R}^2$

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = xy^2. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie den Typ und transformieren Sie sie auf Normalform. (Ersetzen Sie x, behalten Sie y bei.)

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ von (1) an.

(c) Lösen Sie das AWP für (1) mit den Anfangsdaten

$$u(x,0) = \sin x, \quad u_y(x,0) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8 P

2. Bestimmen Sie den Typ der folgenden partiellen DGL und bestimmen Sie eine geeignete Koordinatentransformation, $\xi = \xi(x,y)$ und $\eta = \eta(x,y)$, sodass die Gleichung

$$x^4 u_{xx} + (x^5 y - 2x) u_{xy} - 2x^2 y\, u_{yy} + u = 0; \quad x \neq 0,\, y \neq 0.$$

auf charakteristische Form transformiert wird.

Hinweis. Das Ausführen der Transformation wird nicht verlangt. **4 P**

3. (a) Bestimmen Sie den Typ der folgenden PDGl

$$y^5 u_{xx} - y\, u_{yy} + 2u_y = 0, \quad y > 0$$

und finden Sie geeignete neue Koordinaten.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u(x,y)$. **6 P**

4. Wir betrachten die eindimensionale Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

(a) Lösen Sie das AWP auf $\mathbb{R}$:

$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Lösen Sie das AWP auf $\mathbb{R}$:

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \chi_{(-1,1)}(x),$$

hierbei ist χ_M die charakteristische Funktion von M. Skizzieren Sie den Graphen von $u(x,t)$ für $t \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right\}$.

4 P