Analysis 4 für Physiker, Serie 5

Abgabe am 9. Mai 2007

1. Es sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar und
$$u(x,y)=xy+x\,g\left(\frac{y}{x}\right),\quad x\neq 0.$$
Zeigen Sie, dass $x\,u_x+y\,u_y=xy+u$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$ mit $x\neq 0$. **2 P**

2. Es sei $v=v(x,y)$, $v\in C(\mathbb{R}^2)$ eine gegebene Funktion und $x=x(r,\varphi)=r\cos\varphi$, $y=y(r,\varphi)=r\sin\varphi$ für alle $r>0$ und $\varphi\in\mathbb{R}$. Wir definieren über $u(r,\varphi)=v(x,y)=v(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$ eine neue Funktion u.
Bestimmen Sie
$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$$
in Abhängigkeit von x, y, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy} und v_{yy}. **5 P**

3. Lösen Sie das Anfangswertproblem in $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die charakteristischen Linien in der xy-Ebene.
$$u_x+u_y=u^2,\quad u(x,0)=1.$$
4 P

4. Betrachtet wird die PDGl $x\,u_x+y\,u_y=2u$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
(a) Bestimmen Sie die charakteristischen Linien (in der xy-Ebene).
(b) Geben Sie zum Anfangswertproblem $u(x,0)=x^2$ zwei Lösungen an. **4 P**

5. Ermitteln Sie für alle Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ den Typ der folgenden PDGl. Im Falle des gemischten Typs skizzieren Sie die Bereiche der Ebene, wo die Gleichung elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch ist.
(a) $$u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}=0.$$
(b) $$u_{xx}-u_{xy}+2u_y+u_{yy}-3u_{yx}+4u-x^2y=0.$$
(c) $$(1+x)u_{xx}+2xy\,u_{xy}-y^2u_{yy}=0.$$
(d) $$3u_y+u_{xy}=0.$$
4 P