Analysis 4 für Physiker, Serie 4, Lösungen

1. Es sei $H = \mathrm{L}^2([-1,2])$ und

$$g(x) = \begin{cases} -2, & -1 \le x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ \mathrm{e}^{1-x}, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Multiplikationsoperator $T_g \colon H \to H$, $T_g f = g f$ beschränkt ist und berechnen Sie seine Norm $\left\| T_g \right\|$.

(b) Bestimmen Sie sein Punktspektrum $\sigma_{\mathrm{p}}(T_g)$. Geben Sie zu jedem Eigenwert mindestens zwei linear unabhängige Eigenfunktionen an. Welche Dimension haben die Eigenräume?

(c) Bestimmen Sie den Spektralradius $r(T_g)$ und das Spektrum $\sigma(T_g)$. **6 P**

2. Welche der folgenden partiellen Differentialoperatoren L, die auf $\mathrm{C}^3(\Omega)$ definiert sind, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \quad y > 0\}$, sind linear? Welche der PDGln $L(u) = 0$ sind linear, semilinear bzw. quasilinear? **3 P**

(a) $L(u) = u_x + u_y,$

(b) $L(u) = u_x + u\, u_y,$

(c) $L(u) = u_x + u_y^2,$

(d) $L(u) = u_{xx} + u_y + x,$

(e) $L(u) = u_x \sqrt{x^2+1} \cos y + u_{xyx} - u \arctan\left(\frac{x}{y}\right),$

(f) $L(u) = u_x u_{yy} u_{xy} + x^2 u_x.$

Lösung. (a) $L[u] = u_x + u_y$ ist ein linearer Operator. $L[u] = u_x + u_y = 0$ ist eine lineare PDGL.
(b) $L[u] = u_x + u\, u_y$ ist kein linearer Operator, da $L[\lambda u] = \lambda u_x + \lambda^2 u\, u_y \neq \lambda u_x + \lambda u\, u_y = \lambda L[u]$. $L[u] = 0$ ist eine quasilineare PDGL.
(c) $L[u] = u_x + u_y^2$ ist kein linearer Operator und die PDGL $L[u] = 0$ ist nicht quasilinear, nicht semilinear und nicht linear.
(d) $L[u] = u_{xx} + u_y + x$ ist kein linearer Operator, da $L[u+v] = u_{xx} + v_{xx} + u_y + v_y + x \neq u_{xx} + v_{xx} + u_y + v_y + 2x = L[u] + L[v]$. $L[u] = 0$ ist eine linearer PDGL.
(e) $L[u] = u_x \sqrt{x^2-1} \cos y + u_{xyx} - u \arctan(\frac{x}{y})$ ist ein linearer Operator. $L[u] = 0$ ist eine lineare PDGL.
(f) $L[u] = u_x u_{yy} u_{xy} + x^2 u_x$ ist kein linearer Operator und $L[u] = 0$ eine nicht quasilineare, nicht semilineare und nicht lineare PDGL.]

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$ der PDGl $3u_y + u_{xy} = 0$. **3 P**

Lösung. Die PDGL lässt sich auch schreiben als

$$3u_y + u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3u + u_x) = 0.$$

Folglich muss gelten, dass $3u + u_x = a(x)$ ist. Die Lösung der zugehörigen homogenen gew. DGL lautet $u_h = b(y)e^{-3x}$. So ergibt sich als allgemeine Lösung der PDGL also $u(x,y) = B(y)e^{-3x} + A(x)$ mit $A(x), B(y) \in C^2(\mathbb{R})$.

4. (a) Zeigen Sie, dass $u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$ die eindimensionale Wellengleichung erfüllt.

   (b) Finden Sie die allgemeine Lösung $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ von

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 u_x\right) = x^2 u_{yy}.$$

   Hinweis für (b): Substituieren Sie $v = xu$ und verwenden Sie, dass die Funktion $u(x,t)$ aus (a) die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist. **4 P**

   Lösung. Sei im folgenden $v = x - at, w = x + at$. Also $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 1$ und $-\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = a$. Es folgt für die zweite Ableitung nach der Ortsvariablen x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial x} + \psi'(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \varphi''(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \psi''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = \varphi''(v) + \psi''(w)$$

   Analog folgt für die zweite zeitliche Ableitung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\varphi''(v) + \psi''(w)\right)$$

   Aus der eindimensionalen Wellengleichung ergibt sich durch einsetzen:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\varphi''(v) + \psi''(w) - \left(\varphi''(v) + \psi''(w)\right)\right) = 0$$

   Es handelt sich bei $u(x,t)$ also wie behauptet um eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.
   (b) Mit der Substitution $v = xu$ also $u = \frac{v}{x}$, $u_x = \frac{v_x}{x} - \frac{v}{x^2}$, $u_{yy} = \frac{v_{yy}}{x}$ lautet die PDGL

$$\frac{\partial}{\partial x}(xv_x - v) = xv_{yy}$$

$$\Rightarrow v_x + xv_{xx} - v_x = xv_{yy} \Rightarrow v_{xx} - v_{yy} = 0$$

   Also lautet die allgemeine Lösung der AusgangsPDGL:

$$u = \frac{1}{x}\left(\varphi(x-y) + \psi(x+y)\right) \quad \text{mit} \quad \varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$$

5. Lösen Sie $u_x + u_y + u = 1$, bezüglich der Anfangsbedingungen

$$u = \sin x, \quad \text{auf der Kurve} \quad y = x^2 + x, \quad x > 0.$$

   4 P

   Lösung. Die charakteristischen Gleichungen und die parametrische Form der Anfangskurve lauten

$$\begin{aligned} x_t(t,s) &= 1, & y_t(t,s) &= 1, & u_t(t,s) &= -u + 1, \\ x(0,s) &= s, & y(0,s) &= s^2 + s, & u(0,s) &= \sin s. \end{aligned}$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichungen lauten:

$$x(t,s) = t + f_1(s), \qquad y(t,s) = t + f_2(s), \qquad u(t,s) = f_3(s) * e^{-t} + 1.$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt nun:

$$x(t,s) = t + s, \qquad y(t,s) = s^2 + s + t, \qquad u(t,s) = (\sin s - 1)e^{-t} + 1.$$

Durch Einsetzen von $s = \sqrt{y - x},\ t = x - \sqrt{y - x}$ folgt als Lösung:

$$u(x,y) = \left(\sin\sqrt{y - x} - 1\right) e^{\sqrt{y-x}-x} + 1$$