Analysis 4 für Physiker, Serie 4

Abgabe am 2. Mai 2007

1. Es sei $H = \mathrm{L}^2([-1,2])$ und

$$g(x) = \begin{cases} -2, & -1 \le x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ \mathrm{e}^{1-x}, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie, dass der Multiplikationsoperator $T_g \colon H \to H$, $T_g f = g f$ beschränkt ist und berechnen Sie seine Norm $\|T_g\|$.

   (b) Bestimmen Sie sein Punktspektrum $\sigma_{\mathrm{p}}(T_g)$. Geben Sie zu jedem Eigenwert mindestens zwei linear unabhängige Eigenfunktionen an. Welche Dimension haben die Eigenräume?

   (c) Bestimmen Sie den Spektralradius $r(T_g)$ und das Spektrum $\sigma(T_g)$. **6 P**

2. Welche der folgenden partiellen Differentialoperatoren L, die auf $\mathrm{C}^3(\Omega)$ definiert sind, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \quad y > 0\}$, sind linear? Welche der PDGln $L(u) = 0$ sind linear, semilinear bzw. quasilinear? **3 P**

   (a) $L(u) = u_x + u_y$,

   (b) $L(u) = u_x + u\, u_y$,

   (c) $L(u) = u_x + u_y^2$,

   (d) $L(u) = u_{xx} + u_y + x$,

   (e) $L(u) = u_x \sqrt{x^2+1} \cos y + u_{xyx} - u \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$,

   (f) $L(u) = u_x u_{yy} u_{xy} + x^2 u_x$.

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$ der PDGl $3u_y + u_{xy} = 0$. **3 P**

4. (a) Zeigen Sie, dass $u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, $\varphi, \psi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ die eindimensionale Wellengleichung erfüllt.

   (b) Finden Sie die allgemeine Lösung $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$, $\Omega = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ von

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 u_x\right) = x^2 u_{yy}.$$

   Hinweis für (b): Substituieren Sie $v = xu$ und verwenden Sie, dass die Funktion $u(x,t)$ aus (a) die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist. **4 P**

5. Lösen Sie $u_x + u_y + u = 1$, bezüglich der Anfangsbedingungen

$$u = \sin x, \quad \text{auf der Kurve} \quad y = x^2 + x, \quad x > 0.$$

4 P