Analysis 4 für Physiker, Serie 3

Abgabe am 25. April 2007

1. Beweisen Sie: Ist λ ein Eigenwert eines isometrischen Operators, so gilt $|\lambda|=1$. **2 P**

2. Bestimmen Sie das Spektrum einer orthogonalen Projektion. **4 P**

3. Es sei $T \in \mathscr{L}(H)$ invertierbar mit beschränktem inversen Operator $T^{-1} \in \mathscr{L}(H)$.

   (a) Zeigen Sie, dass 0 zur Resolventenmenge von T gehört, $0 \in \rho(T)$.

   (b) Zeigen Sie, dass $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$. **3 P**

4. Beweisen oder widerlegen Sie. Es sei H ein Hilbertraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ eine Folge von Elementen aus H.

   (a) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert, dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

   (b) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konvergiert, dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. **3 P**

5. Es sei H ein Hilbertraum und $y, z \in H$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ fixiert. Wir definieren den linearen Operator $T_{y,z} \colon H \to H$ über $T_{y,z}(x) = \langle x, y \rangle\, z$.

   (a) Beweise, dass $T_{y,z}$ beschränkt ist und bestimmen Sie seine Norm. Welchen Rang hat $T_{y,z}$?

   (b) Berechnen Sie den Adjungierten $T^*_{y,z}$.

   (c) Zeigen Sie, dass $T_{y,z}$ genau dann normal ist, wenn $y = \alpha z$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$.

   Hinweis. Der *Rang* einer linearen Abbildung ist die Dimension des Bildraumes. **7 P**