Analysis 4 für Physiker, Serie 2

Abgabe am 18. April 2007

1. Es sei $H = \ell_2$ der komplexe Hilbertsche Folgenraum und $\alpha = (\alpha_n)$ eine beschränkte komplexe Folge. Für eine Folge $x = (x_n)$ setzen wir $T_\alpha(x) = (\alpha_n x_n)$.

   (a) Zeigen Sie, dass T_α den Hilbertraum H in sich abbildet.
   (b) Zeigen Sie, dass T_α linear und beschränkt ist.
   (c) Bestimmen Sie den adjungierten Operator T_α^*.
   (d)* Berechnen Sie $\|T_\alpha\|$. **6 P + 2 ZP**

2. Es sei $H = \mathrm{L}^2([0,1])$ und $g \in \mathrm{C}([0,1])$ fixiert. Für $f \in H$ definieren wir die Funktion $T_g f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ über
$$T_g f(t) = g(t) f(t), \quad t \in [0,1].$$
   (a) Zeigen Sie, dass T_g den Raum H in sich abbildet.
   (b) Zeigen Sie, dass $T_g\colon H \to H$ linear und beschränkt ist.
   (c) Bestimmen Sie den agjungierten Operator T_g^*. **6 P**

3. Es sei H ein komplexer Hilbertraum und $T \in \mathscr{L}(H)$.

   (a) Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.
   (b) Zeigen Sie, dass für invertierbares T gilt, dass auch T^* invertierbar ist und $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. **4 P**

4. Es sei H ein Hilbertraum und H_1 ein abgeschlossener linearer Teilraum von H, wobei $\{0\} \subsetneq H_1 \subsetneq H$. Es sei $P\colon H \to H$, die Projektion, die durch $P(x) = x_1$ gegeben ist. Dabei ist $x_1 \in H_1$ der durch Satz V.1.10 eindeutig bestimmte Vektor aus H_1 in der orthogonalen Zerlegung $x = x_1 + x_2$, $x_2 \in H_1^\perp$.

   Zeigen Sie, dass $\|P\| = 1$. **2 P**

5. Welche der folgenden linearen Operatoren sind normal, selbstadjungiert, unitär bzw. isometrisch?

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$, (b) $B = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$, (c) S sei der Rechts-Shift in ℓ_2 aus Beispiel 1 (f). **3 P**