Analysis 4 für Physiker, Serie 14

Abgabe freiwillig

1. Es sei $f \in C^4(\mathbb{R})$ eine 2π-periodische Funktion. Wir betrachten das innere Dirichletproblem für die Kreisscheibe $U_1(0)$:

$$\Delta u(r,\varphi) = 0, \quad 0 \le r < 1, \quad u(1,\varphi) = f(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

   Es sei $f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))$ die Fourierreihe von f.

   Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))r^n$$

   das obige Randwertproblem löst .

   4 P

2. Lösen Sie das RAWP mit Neumannschen Bedingungen für die eindimensionale Wellengleichung.

$$\begin{array}{llll} \text{(We)} & u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ \text{(RB)} & u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & & t > 0 \\ \text{(AB)} & u(x,0) = 0, & & u_t(x,0) = \cos^2 x \quad 0 < x < \pi. \end{array}$$

   4 P

3. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$G(x_1,x_2,y_1,y_2) = e_2(\|x-y\|) - e_2(\|x-y'\|), \quad y' = (y_1,y_2)' = (y_1,-y_2)$$

   eine Greensche Funktion für die obere Halbebene $\Omega = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ ist. Berechnen Sie insbesondere $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} G(x,y)$ für $x = (x_1,0) \in \partial\Omega$ und schreiben Sie die Poissonsche Formel für Ω auf. **4 P**

4. Berechnen Sie die Fourier-Sinusreihe von $f(x) = \cos x$ auf $[0,\pi]$. **4 P**

5. Berechnen Sie die Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenfunktionen des Neumannschen Laplace im Quadrat $\Omega = (0,\pi) \times (0,\pi)$, d. h. betrachten Sie das Problem

$$\Delta u = \lambda u, \quad \text{in } Q,$$
$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = 0, \quad \forall (x,y) \in Q.$$

   4 P