Analysis 4 für Physiker, Serie 1

Abgabe am 11. April 2007

1. (a) Berechnen Sie die Fourierreihe $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ der folgenden 2π-periodischen Funktionen, $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, **4 P**

$$f(x)=|x|,\quad x\in[-\pi,\pi],\quad g(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\pi\\ -1, & \pi\le x<2\pi.\end{cases}$$

   (b) Berechnen Sie $\left\|f\right\|^2$ und $\left\|g\right\|^2$ und schreiben Sie die Parsevalsche Identität auf. Dabei sei für eine 2π-periodische Funktion f, $\left\|f\right\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(x)\right|^2\,\mathrm{d}x$. **2 P**

   (c) Welche Werte nimmt die Fourierreihe von g an den Stellen $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$ an? Vergleichen Sie diese Werte mit den Werten von g an diesen Stellen. **2 P**

   Hinweis. Zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten können Sie die Formeln in `http://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Reihe#Allgemeine_Form` mit $\omega=1$ bzw. $T=2\pi$ benutzen.

2. Welche der folgenden Funktionen F_i, $i=1,\dots,6$, definiert ein beschränktes lineares Funktional auf dem Hilbertsschen Folgenraum $\ell_2(\mathbb{C})$? Für $x=(x_n)$, $x\in\ell_2$ sei

$$F_1(x)=x_3,\qquad F_2(x)=2x_1+1,\qquad F_3(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2,$$

$$F_4(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n,\qquad F_5(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n},\qquad F_6(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_nz^n,$$

   wobei $z\in\mathbb{C}$ und $|z|<1$. **4 P**

3. Es sei $T\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $T(x_1,x_2,x_3)=x_1-2x_2+3x_3$ eine lineare Abbildung zwischen Euklidischen Räumen. Berechnen Sie die Operatornorm $\|T\|$ und geben Sie ein $x\in\mathbb{R}^3$ an mit $\|x\|=1$ und $\|T(x)\|=\|T\|$. **2 P**

4. Es sei $a\in[0,1]$ fixiert und $E=\mathrm{C}([0,1])$. Gegeben seien das lineare Funktional $T\colon E\to\mathbb{R}$ durch $T(f)=f(a)$, $f\in E$. Der lineare Raum E werde nun mit zwei veschiedenen Normen ausgestattet: E_1 sei der Raum E mit der Supremumnorm, $\left\|f\right\|=\sup_{x\in[0,1]}\left|f(x)\right|$ und E_2 der Raum E mit der Norm $\left\|f\right\|=\int_0^1\left|f(x)\right|\,\mathrm{d}x$.

   Untersuchen Sie, ob $T_i\colon E_i\to F$, $i=1,2$, beschränkt ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Norm $\|T_i\|$. **6 P**

Frohe Ostern wünschen Ihnen Sonja Hohloch, Günter Berger und Axel Schüler!