Gruppe B
Test — Analysis 4 für Physiker
06.06.2007

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Lösen der 4 Aufgaben. Benutzen Sie bitte für jede Aufgabe ein **extra Blatt**. Schreiben Sie auf jedes Blatt leserlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer.** Schreiben Sie in Sätzen und begründen Sie Ihre Antworten. Taschenrechner und Aufzeichnungen sind nicht erlaubt. Bitte schalten Sie Ihr Handy aus. Notieren Sie zum Schluss auf Ihrem ersten Blatt, wie viele Blätter Sie abgeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Für $a > 0$ sei $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben über $f_a(x) = H(-x)e^{ax}$, wobei H die Heavisidefunktion $H = \chi_{(0,+\infty)}$ ist.
Zeigen Sie, dass $f_a \in L^1(\mathbb{R})$ und berechnen Sie für $a, b > 0$, $a \neq b$, die Faltung $f_a * f_b$. **3 P**
Lösung. Wegen

$$\int_{\mathbb{R}} f_a(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}(1-0) = \frac{1}{a} < \infty$$

ist f_a integrierbar auf $\mathbb{R}$.
Nach Definition ist

$$f_a * f_b(x) = \int_{\mathbb{R}} f_a(y) f_b(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} H(-y)e^{ay} H(-x+y)e^{b(x-y)}\,dy =$$

wegen der Faktoren $H(-y)H(y-x)$ kommt nur in Frage $y < 0$ und $x < y$, also insgesamt $x < 0$ und $y \in (x, 0)$

$$\begin{aligned} &= H(-x)\int_x^0 e^{ay+bx-by}\,dy = H(-x)e^{bx}\int_x^0 e^{(a-b)y}\,dy \\ &= H(-x)e^{bx}\frac{1}{a-b}\,e^{(a-b)y}\Big|_x^0 = H(-x)\frac{1}{a-b}\left(e^{bx} - e^{ax}\right). \end{aligned}$$

Integral berechnen: 1 P
Faltungsformel aufschreiben, einsetzen: 1P
Faltung berechnen: 1 P

Aufgabe 2: Lösen Sie das Anfangswertproblem in $\mathbb{R}^2$:

$$u_x - u_y = u^2, \quad u(x,x) = 1.$$

4 P

Lösung. Das charakteristische Gleichungssystem und die Anfangskurve lauten:

$$x_t(t,s)=1, \qquad x(0,s)=s, \tag{1}$$
$$y_t(t,s)=-1, \qquad y(0,s)=s, \tag{2}$$
$$u_t(t,s)=u^2, \qquad u(0,s)=1. \tag{3}$$

Die allgemeine Lösung lautet also $x(t,s)=t+s$, $y(t,s)=-t+s$. Lösung der gDGl $u'=u^2=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$:

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{u^2} \quad \Longrightarrow \quad t-C=-\frac{1}{u} \Longrightarrow u(t,s)=\frac{1}{C-t}.$$

Die Konstante C wird aus der Anfangsbedingung bestimmt:

$$1=u(0,s)=\frac{1}{C} \Longrightarrow C=1 \Longrightarrow u(t,s)=\frac{1}{1-t}.$$

Auflösen der ersten beiden Gleichungen nach s,t liefert $t=\frac{1}{2}(x-y)$ und damit

$$u(x,y)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}(x-y)}=\frac{2}{2-x+y}.$$

charakteristisches GS und Anfangskurve: 1 P
Allg. Lösen des charakterist. GS: 1 P
Spezielle Lösung (AWP) der char. GS: 1 P
Auflösen nach s,t und Einsetzen: 1 P

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den Typ der partiellen DGL und bestimmen Sie eine geeignete Koordinatentransformation, $\xi=\xi(x,y)$ und $\eta=\eta(x,y)$, sodass die Gleichung auf charakteristische Form transformiert wird:

$$u_{xx}+2\mathrm{e}^x u_{xy}+(\mathrm{e}^{2x}-1)u_{yy}-u_x+4y=0.$$

4 P

Hinweis. Das Ausführen der Transformation wird nicht verlangt.
Lösung. **1 P**. Die Koeffizientendeterminante ist -1 und damit ist die Gleichung hyperbolisch:

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{2x}-1 \end{vmatrix}=\mathrm{e}^{2x}-1-\mathrm{e}^{x2}=\mathrm{e}^{2x}-1-\mathrm{e}^{2x}=-1.$$

Die Gleichung der charakteristischen Linien lautet:

$$(y')^2-2\mathrm{e}^x y'+\mathrm{e}^{2x}-1=0$$

Diese gDGl besitzt zwei Lösungsscharen

$$y'_{1,2}=\mathrm{e}^x\pm\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2x}+1}=\mathrm{e}^x\pm 1.$$

Integration bzgl x liefert die Lösungen

$$y=\mathrm{e}^x+x+c_1, \quad y=\mathrm{e}^x-x+c_2.$$

Die Integrationskonstanten c_1 und c_2 sind die neuen Variablen, die die Transformation auf charakteristische Form realisieren:

$$\xi = \xi(x,y) = y - e^x - x, \quad \eta(x,y) = y - e^{-x} + x.$$

Typ: 1 P
charakteristische Gleichung aufstellen: 1 P
charakteristische Gleichung Lösen: 1 P
Transformation ablesen: 1 P
Aufgabe 4: Es sei $H = \ell_2$ der komplexe Hilbertsche Folgenraum. Für $x = (x_n) \in H$ definieren wir den linearen Operator

$$T(x) = \left(\frac{x_n}{n}\right) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in H$ gilt: $T(x) \in H$. **1 P**
(b) Berechnen Sie $\|T\|$. **1 P**
(c) Bestimmen Sie das Punktspektrum von T. **2 P**
(d) Berechnen Sie die Resolvente $R_\lambda(T)$ von T an der Stelle $\lambda = 3$ und deren Norm. **3 P**
Lösung. (a), (b) Es ist

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2 < \infty.$$

Folglich gilt $T(x) \in H$. Die obige Abschätzung liefert außerdem $\|T\| \leq 1$, denn für alle $x \in H$, $x \neq 0$ ist $\|T(x)\| / \|x\| \leq 1$.
Die obere Schranke 1 wird angenommen, denn für $x = e_1 = (1,0,0,\dots)$ gilt $T(e_1) = e_1$ und damit $\|T(e_1)\| / \|e_1\| = 1$.
obere Schranke wird angenommen: **1 P**.
(c) Man erkennt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Standardbasisvektoren $e_n = (0,\dots,1,0,\dots) \in H$ gilt

$$T(e_n) = \left(0,\dots,\frac{1}{n} \cdot 1, 0, \dots\right) = \frac{1}{n} e_n.$$

Also ist $1/n$ Eigenwert zum Eigenvektor e_n. Dies ist das vollständige Punktspektrum, da die Eigenwertgleichung $T(x) = \lambda x$ keine weitere Lösung hat. Angenommen es gäbe einen Eigenwert λ, der von $1/n$ verschieden ist, dann gilt wegen $(T - \lambda)x = 0$:

$$(1-\lambda)x_1 = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) x_2 = \cdots = \left(\frac{1}{n} - \lambda\right) x_n = \cdots = 0.$$

Also erhält man $x_1 = x_2 = \cdots = 0$ also $x = 0$; dies ist aber kein Eigenvektor! Die Annahme war falsch, $1/n, n \in \mathbb{N}$ sind die einzigen Eigenwerte.
alle EW / EV angegeben: 1 P
keine zusätzlichen: 1 P
(d) Nach Definition ist $R_2(T) = (T - 2I)^{-1}$, falls die rechte Seite existiert und beschränkt ist. Da die Folge $(\beta_n) = \left(\frac{n}{1-2n}\right)$ konvergent ist (gegen $-1/2$), ist der zugehörige diagonale Multiplikationsoperator T_β beschränkt durch

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\beta_n\right| = \sup_n \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{\inf_n (2 - \frac{1}{n})} = \left|\beta_1\right| = 1.$$

Also gilt $\left\|T_\beta\right\| \leq 1$. Ferner gilt:

$$(T-2I)\left(\left(\frac{n}{1-2n}\right)x_n\right) = \left(\frac{1}{n}\,\frac{n}{1-2n}x_n\right) - \left(\frac{2n}{1-2n}\,x_n\right) = \left(\frac{1-2n}{1-2n}\,x_n\right) = (x_n).$$

Analog erhält man $T_\beta \circ (T-2I) = I$. Somit ist T_β die Resolvente von T bei $\lambda = 2$.
Angabe von T_β: 1 P
Beschränktheit: 1 P
Nachweis der Resolventengleichung: 1 P
(e) Bemerkung: Das Spektrum ist abgeschlossen, enthält also mindestens den Abschluss des Punktspektrums:

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

In der Tat hat das Spektrum keine weiteren Punkte.

Klage nicht, handle!
Hölderlin