

Partielle Differentialgleichungen für Physiker –  
Sommersemester 2007

Axel Schüler

30. Juli 2007



# Inhaltsverzeichnis

<b>5 Hilbertraum</b>	<b>7</b>
5.3 Lineare Operatoren im Hilbertraum . . . . .	7
5.3.1 Beschränkte lineare Operatoren . . . . .	7
5.3.2 Der adjungierte Operator . . . . .	11
5.3.3 Klassen beschränkter linearer Operatoren . . . . .	13
5.3.4 Orthogonale Projektionen . . . . .	15
5.3.5 Spektrum und Resolvente . . . . .	18
5.3.6 Das Spektrum von selbstadjungierten Operatoren . . . . .	22
5.4 Anhang I: Orthogonale Projektionen . . . . .	24
5.5 Anhang II: Kompakte, selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum . . . . .	25
<b>6 Partielle Differentialgleichungen I — Einführung</b>	<b>29</b>
6.1 Klassifikation Partieller Differentialgleichungen (PDGl) . . . . .	29
6.1.1 Einführung . . . . .	29
6.1.2 Beispiele . . . . .	30
6.2 PDGl erster Ordnung — Die Methode der Charakteristiken . . . . .	33
6.3 Klassifikation von semilinearen PDGln zweiter Ordnung . . . . .	37
6.3.1 Quadratische Formen – Wiederholung . . . . .	37
6.3.2 Elliptisch, Parabolisch, Hyperbolisch . . . . .	37
6.3.3 Koordinatentransformationen . . . . .	38
6.3.4 Charakteristiken . . . . .	40
6.3.5 Die schwingende Saite . . . . .	43
<b>7 Distributionen</b>	<b>49</b>
7.1 Einführung — Testfunktionen und Distributionen . . . . .	49
7.1.1 Motivation . . . . .	49
7.1.2 Der Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	51
7.2 Die Distributionen $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	55
7.2.1 Reguläre Distributionen . . . . .	55
7.2.2 Andere Beispiele für Distributionen . . . . .	57
7.2.3 Konvergenz in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . . . . .	58
7.2.4 Die Distribution $\mathcal{D}' \frac{1}{x}$ . . . . .	59
7.2.5 Rechnen mit Distributionen . . . . .	61
7.3 Tensor Produkt und Faltung von Distributionen . . . . .	68

7.3.1	Der Träger einer Distribution . . . . .	68
7.3.2	Das Tensorprodukt . . . . .	69
7.3.3	Die Faltung . . . . .	71
7.3.4	Lineare Variablentransformation . . . . .	74
7.3.5	Fundamentallösungen . . . . .	75
7.4	Fouriertransformation in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	77
7.4.1	Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	77
7.4.2	Der Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	83
7.4.3	Die Fouriertransformation im Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	84
7.5	Anhang — Mehr zur Faltung . . . . .	87
<b>8</b>	<b>PDGI II — Die Gleichungen der Mathematischen Physik</b>	<b>89</b>
8.1	Fundamentallösungen . . . . .	89
8.1.1	Die Laplace-Gleichung . . . . .	89
8.1.2	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	91
8.1.3	Die Wellengleichung . . . . .	93
8.2	Cauchy-Probleme . . . . .	96
8.2.1	Motivation . . . . .	96
8.2.2	Die Wellengleichung . . . . .	97
8.2.3	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	101
8.2.4	Physikalische Interpretation der Ergebnisse . . . . .	103
8.3	Die Fouriermethode zur Lösung von Rand-Anfangswertproblemen . . . . .	105
8.3.1	Randanfangswertprobleme (RAWP) . . . . .	106
8.3.2	Eigenwertprobleme für die Laplace-Gleichung . . . . .	110
8.4	Randwertprobleme für die Laplace und die Poissongleichung . . . . .	112
8.4.1	Formulierung der Randwertprobleme . . . . .	113
8.4.2	Existenzsätze . . . . .	114
8.4.3	Grundeigenschaften harmonischer Funktionen . . . . .	115
8.5	Die Greensche Funktion zur Laplace-Gleichung . . . . .	117
8.5.1	Die Neumannsche Funktion (Greensche Funktion 2. Art) . . . . .	121

# **Inhaltsverzeichnis**



# Kapitel 5

## Hilbertraum

### 5.3 Lineare Operatoren im Hilbertraum

In diesem Abschnitt behandeln wir beschränkte lineare Operatoren, adjungierte Operatoren. Das Spektrum eines beschränkten Operators wird untersucht. Als Grundkörper wählen wir immer  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

#### 5.3.1 Beschränkte lineare Operatoren

Es seien  $(E_1, \|\cdot\|_1)$  und  $(E_2, \|\cdot\|_2)$  normierte lineare Räume. Aus dem Abschnitt „Topologie und Metrische Räume“ wiederholen wir den Begriff der Stetigkeit: Eine Abbildung  $T: E_1 \rightarrow E_2$  heißt *stetig in*  $x_0 \in E_1$ , wenn für alle Folgen  $(x_n)$  aus  $E_1$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  in  $E_1$  folgt, dass  $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$  in  $E_2$ . Die Abbildung  $T: E_1 \rightarrow E_2$  heißt *stetig*, wenn  $T$  stetig ist in jedem Punkt von  $E_1$ .

**Definition 5.1** (a) Eine lineare Abbildung  $T: E_1 \rightarrow E_2$  heißt *beschränkt*, falls es eine positive Konstante  $C > 0$  derart gibt, dass

$$\|T(x)\|_2 \leq C \|x\|_1, \quad \text{für alle } x \in E_1. \quad (5.1)$$

(b) Angenommen  $T: E_1 \rightarrow E_2$  ist beschränkt, dann ist die *Operatornorm*  $\|T\|$  von  $T$  die kleinste derartige Zahl  $C$ , für die (5.1) für alle  $x \in E_1$  gilt. Also ist

$$\|T\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x \in E_1: \|T(x)\|_2 \leq C \|x\|_1\}. \quad (5.2)$$

#### (a) Eigenschaften der Operatornorm

Es gilt:

$$(a) \quad \|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|_2}{\|x\|_1} \mid x \in E_1, x \neq 0 \right\}, \quad (5.3)$$

$$(b) \quad \|T\| = \sup \{ \|T(x)\|_2 \mid \|x\|_1 \leq 1 \} \quad (5.4)$$

$$(c) \quad \|T\| = \sup \{ \|T(x)\|_2 \mid \|x\|_1 = 1 \} \quad (5.5)$$

*Beweis.* Def.  $\rightarrow$  (a): In der Definition kann man auf  $x = 0$  verzichten, so dass

$$\|T\| = \inf\{C > 0 \mid \frac{\|T(x)\|_1}{\|x\|_2} \leq C \ \forall x \neq 0\},$$

die kleinste obere Schranke aller Werte  $\frac{\|T(x)\|_1}{\|x\|_2}$ ,  $x \neq 0$  ist.

(a)  $\leftrightarrow$  (c): Wir können uns bei (a) auf normierte Vektoren  $\|x\| = 1$  beschränken, denn

$$\frac{\|T(\alpha x)\|_2}{\|\alpha x\|_1} = \frac{|\alpha| \|T(x)\|_2}{|\alpha| \|x\|_1} = \frac{\|T(x)\|_2}{\|x\|_1}.$$

(b)  $\leftrightarrow$  (c): Sei  $y \in E_1$  mit  $\|y\| = \alpha \leq 1$  und  $x = y/\alpha$ . Dann ist  $x$  ein normierter Vektor und es gilt  $\|T(y)\|_2 = \alpha \|T(x)\|_2 \leq \|T(x)\|_2$ . Damit ist  $\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|T(x)\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 = 1} \|T(x)\|_2$ . Die umgekehrte Ungleichung ist aber auch klar, da die Referenzmenge  $\|x\| \leq 1$  die Menge der  $x$  mit  $\|x\| = 1$  umfasst. Das Supremum der größeren Menge ist nicht kleiner. ■

Man beachte, dass aus (a) folgt, dass  $\|T\|$  ebenfalls eine obere Schranke für alle  $\|T(x)\|_2 / \|x\|_1$  ist, also

$$\forall x \neq 0 : \frac{\|T(x)\|_2}{\|x\|_1} \leq \|T\|$$

bzw.

$$\forall x \in E_1 : \|T(x)\|_2 \leq \|T\| \|x\|_1. \quad (5.6)$$

**Satz 5.1** Es sei  $T: E_1 \rightarrow E_2$  eine lineare Abbildung zwischen den normierten Räumen  $E_1$  und  $E_2$ .

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $T$  ist beschränkt.
- (b)  $T$  ist stetig.
- (c)  $T$  ist stetig in einem Punkt  $x_0 \in E_1$ .

*Beweis.* (a)  $\rightarrow$  (b). Dies folgt aus der Linearität von  $T$  und obiger Eigenschaft (5.6):

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq \|T\| \|x_1 - x_2\|,$$

und  $T$  ist sogar gleichmäßig stetig auf  $E_1$ .

(b) impliziert trivialerweise (c).

(c)  $\rightarrow$  (a). Es sei  $T$  stetig in  $x_0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$ , sodass für  $\|x - x_0\| < \delta$  folgt:  $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ . Wir setzen  $y := x - x_0$ , dann folgt aus  $\|y\| < \delta$

$$\|T(y + x_0) - T(x_0)\| = \|T(y)\| < \varepsilon.$$

Sei nun  $z \in E_1$  mit  $\|z\| \leq 1$ . Dann hat man  $\|\delta/2 z\| \leq \delta/2 < \delta$ ; folglich ist  $\|T(\delta/2 z)\| < \varepsilon$ . Wegen Homogenität von  $T$  folgt weiter,  $\|T(z)\| < 2\varepsilon/\delta$ ; und somit nach Eigenschaft (5.4)  $\|T\| \leq 2\varepsilon/\delta$ . Also ist  $T$  beschränkt. ■

*Notation.* Es seien  $E$  und  $F$  normierte lineare Räume. Mit  $\mathcal{L}(E, F)$  bezeichnen wir die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen von  $E$  nach  $F$ . Im Falle  $E = F$  schreiben wir einfach  $\mathcal{L}(E)$  für  $\mathcal{L}(E, F)$ .

**Satz 5.2** (a) Es seien  $E$  und  $F$  normierte lineare Räume. Dann ist  $\mathcal{L}(E, F)$  ebenfalls ein normierter linearer Raum, wenn wir die lineare Struktur durch

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x), \quad (\lambda T)(x) = \lambda T(x)$$

definieren, wobei  $S, T \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Zusammen mit der Operatornorm  $\|T\|$  wird  $\mathcal{L}(E, F)$  ein normierter linearer Raum.

(b) Wenn  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  und  $S \in \mathcal{L}(F, G)$ , so ist  $S \circ T \in \mathcal{L}(E, G)$  und  $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$ .

*Beweis.* (a) Wir weisen die drei Normeigenschaften nach. Wenn  $\|T\| = 0$ , so  $\|T(x)\|_2 = 0$  für alle  $x \in E$ . Wegen der Definitheit in  $F$  folgt  $T(x) = 0$  für alle  $x$ . Das heißt aber  $T = 0$ . Weiterhin ist für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $x \in E$ ,  $\|(\lambda T)(x)\| = \|\lambda T(x)\|_2 = |\lambda| \|T(x)\|_2$ . Geht man hier zum Supremum über alle  $x \in E_1$ ,  $\|x\|_1 \leq 1$  über, so hat man  $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$ . Wir zeigen, dass die Summe  $S + T$  zweier beschränkter linearer Operatoren wieder beschränkt ist. Sei also für alle  $x \in E$   $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$  und  $\|S(x)\| \leq \|S\| \|x\|$ , so folgt nach Dreiecksungleichung in  $F$

$$\|(S + T)(x)\| = \|S(x) + T(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \leq \|S\| \|x\| + \|T\| \|x\| = (\|S\| + \|T\|) \|x\|.$$

Somit ist  $S + T$  beschränkt und für die Operatornorm ist die Dreiecksungleichung  $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$  erfüllt.

(b) Für alle  $x \neq 0$ ,  $x \in E$  gilt

$$\frac{\|S(T(x))\|}{\|x\|} = \frac{\|S(T(x))\|}{\|T(x)\|} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|S\| \|T\|.$$

Hieraus folgt nach Definition,  $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$ . ■

Man beachte, dass  $\mathcal{L}(E, F)$  vollständig ist, genau dann, wenn  $F$  vollständig ist.

### (b) Beispiele

**Beispiel 5.1** (a)  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  bzw.  $\mathbb{R}^{m \times n}$  ist mit der Operatornorm ein normierter linearer Raum. Jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen normierten Räumen ist beschränkt. Ist  $A = (a_{ij})$  eine Matrixdarstellung von  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , so ist  $\|T\| = \|A\| \leq \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ . Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  erhalten wir

$$T(x) = \left( \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \right);$$

nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU) also

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^2 \leq \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right) \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = C^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

wobei  $C = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$ . Hieraus folgt die Behauptung.

(b) Der Dualraum  $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  der stetigen linearen Funktionale auf  $E$  ist ein vollständiger normierter Raum. (Vgl. Übungsaufgabe 1.3 und 1.4). Sei insbesondere  $E = H$  ein Hilbertraum, dann sind nach V.1.4 alle linearen Funktionale  $\Phi_y(x) = \langle x, y \rangle$ ,  $x \in H$ , stetig mit  $\|\Phi_y\| = \|y\|$ . Umgekehrt sind alle stetigen linearen Funktionale  $F$  von dieser Gestalt,  $F = \Phi_y$  für ein geeignetes  $y \in H$ . Nach der obigen Bemerkung und wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  ist der Dualraum  $E'$  stets ein vollständiger normierter Raum (Banachraum).

(c) Es sei  $H = L^2((0, 1))$ ,  $g \in C([0, 1])$ ,

$$T_g(f)(t) = g(t)f(t), \quad f \in H, \quad t \in (0, 1)$$

definiert einen beschränkten linearen Operator auf  $H$ . (Siehe ÜA 2.1)

(d) Es sei  $H = L^2((0, 1))$ ,  $k(s, t) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ . Dann definiert

$$(Kf)(t) = \int_0^1 k(s, t)f(s) ds, \quad f \in H = L^2([0, 1])$$

einen beschränkten linearen Operator  $K \in \mathcal{L}(H)$ . Es ist

$$\begin{aligned} |(Kf)(t)|^2 &= \left| \int_0^1 k(s, t)f(s) ds \right|^2 \leq \left( \int_0^1 |k(s, t)| |f(s)| ds \right)^2 \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \int_0^1 |k(s, t)|^2 ds \int_0^1 |f(s)|^2 ds \\ &= \int_0^1 |k(s, t)|^2 ds \|f\|_H^2. \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} \|Kf\|_H^2 &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |k(s, t)|^2 ds \right) dt \|f\|_H^2 \\ \|Kf\|_H &\leq \|k\|_{L^2([0,1] \times [0,1])} \|f\|_H. \end{aligned}$$

Das beweist  $Kf \in H$  und mehr noch  $\|K\| \leq \|k\|_{L^2([0,1]^2)}$ . Man nennt  $K$  einen *Integraloperator* und  $k(s, t)$  den *Kern* von  $K$ .

(e) Es sei  $H = L^2(\mathbb{R})$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$(V_a f)(t) = f(t - a), \quad t \in \mathbb{R},$$

definiert einen beschränkten linearen Operator den so genannten *Verschiebungsoperator* (oder Shift-Operator). Tatsächlich gilt

$$\|V_a f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t - a)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2;$$

da alle Quotienten  $\|V_a(f)\| / \|f\| = 1$  sind, folgt  $\|V_a\| = 1$ .

(f)  $H = \ell_2$ . Wir definieren den *Rechts-Shift*  $S$  (oder rechten Verschiebungsoperator) durch

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Offenbar gilt  $\|S(x)\| = \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ . Somit gilt auch hier  $\|S\| = 1$ .

(g) Es sei  $E_1 = C^1([0, 1])$  und  $E_2 = C([0, 1])$ . Wir definieren den *Differentiationsoperator*

$$(Df)(t) = f'(t), \quad f \in C^1([0, 1]), \quad t \in [0, 1].$$

Sei  $\|f\|_1 = \|f\|_2 = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ . Dann ist  $D$  linear aber unbeschränkt. Sei nämlich  $f_n(t) = t^n$ .

Dann gilt  $\|f_n\|_1 = 1$  und  $Df_n(t) = nt^{n-1}$ , so dass  $\|Df_n\|_2 = n$ . Somit gilt  $\|Df_n\|_2 / \|f_n\|_1 = n \rightarrow +\infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $D$  ist unbeschränkt.

Wählt man jedoch eine andere Norm in  $E_1$ , nämlich  $\|f\|_1 = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$  und die Norm in  $E_2$  wie oben, dann ist  $D$  beschränkt, denn

$$\|Df\|_2 = \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)| \leq \|f\|_1 \implies \|D\| \leq 1.$$

### 5.3.2 Der adjungierte Operator

In diesem Abschnitt sei  $H$  stets ein Hilbertraum und  $\mathcal{L}(H)$  der Raum der stetigen (beschränkten) linearen Operatoren auf  $H$ .

Es sei  $T \in \mathcal{L}(H)$  beschränkt und  $y \in H$  fixiert. Dann definiert

$$F(x) = \langle T(x), y \rangle, \quad x \in H$$

ein stetiges lineares Funktional auf  $H$ . In der Tat ist  $F$  als Verknüpfung zweier linearer Abbildungen  $T$  und  $\langle \cdot, y \rangle$  eine lineare Abbildung. Ferner ist  $F$  stetig, da sowohl  $T$  als auch  $\langle \cdot, y \rangle$  stetig sind.

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz (Theorem in V.1.4) existiert ein  $z \in H$  mit

$$\langle T(x), y \rangle = F(x) = \langle x, z \rangle.$$

Diese Korrespondenz  $\langle T(x), y \rangle = \langle x, z \rangle$ ,  $x \in H$ , die auf diese Weise jedem  $y$  ein  $z$  zuordnet bezeichnen wir als  $z = T^*(y)$ . Wir zeigen, dass  $T^*$  linear ist. Sei dazu  $z_1 = T^*(y_1)$ , also  $\langle T(x), y_1 \rangle = \langle x, z_1 \rangle$ ,  $x \in H$ . Addiert man beide Gleichungen, so hat man  $\langle T(x), y + y_1 \rangle = \langle x, z + z_1 \rangle$ ,  $x \in H$ ; somit gilt  $T^*(y + y_1) = z + z_1 = T^*(y) + T^*(y_1)$ . Analog folgt durch Multiplikation mit  $\lambda$ ,  $\langle T(x), \lambda y \rangle = \langle x, \lambda z \rangle$ ,  $x \in H$ ; also  $T^*(\lambda y) = \lambda z = \lambda T^*(y)$ .

**Definition 5.2** Die oben beschriebene Abbildung  $T^*: H \rightarrow H$ ,  $z = T^*(y)$ , ist linear. Es gilt

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle, \quad x, y \in H. \quad (5.7)$$

$T^*$  heißt der zu  $T$  *adjungierte Operator*.

Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$|F(x)| = |\langle T(x), y \rangle| \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|T(x)\| \|y\| \leq \|T\| \|y\| \|x\|.$$

Folglich ist  $F$  beschränkt mit

$$\|F\| \leq \|T\| \|y\|$$

In V.1.4 wurde gezeigt, dass  $\|F\| = \|z\| = \|T^*(y)\|$  gilt. Somit ist

$$\|T^*(y)\| \leq \|T\| \|y\| \quad \text{bzw.} \quad \|T^*\| \leq \|T\|. \quad (5.8)$$

**Satz 5.3** Es seien  $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$ . Dann ist  $T^*$  beschränkt mit  $\|T^*\| = \|T\|$ . Es gilt ferner

- (a)  $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$  und
- (b)  $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ .
- (c)  $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$ .
- (d) Ist  $T$  invertierbar in  $\mathcal{L}(H)$ , so auch  $T^*$ , und es gilt  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .
- (e)  $(T^*)^* = T$ .

*Beweis.* (e) Für alle  $x, y \in H$  gilt

$$\langle x, (T^*)^*(y) \rangle = \langle T^*(x), y \rangle = \overline{\langle y, T^*(x) \rangle} = \overline{\langle T(y), x \rangle} = \langle x, T(y) \rangle,$$

daher ist für alle  $x, y \in H$ ,  $\langle x, T^{**}(y) - T(y) \rangle = 0$ . Setzt man  $x = T^{**}(y) - T(y)$ , so erhält man  $\|T^{**}(y) - T(y)\| = 0$  also  $T^{**}(y) = T(y)$  für alle  $y$ . Das heißt aber,  $T^{**} = T$ .

Außerdem gilt  $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$ ; sodass  $\|T^*\| = \|T\|$ .

(a) Für alle  $x, y \in H$  ist

$$\begin{aligned} \langle (T_1 + T_2)(x), y \rangle &= \langle T_1(x) + T_2(x), y \rangle = \langle T_1(x), y \rangle + \langle T_2(x), y \rangle \\ &= \langle x, T_1^*(y) \rangle + \langle x, T_2^*(y) \rangle = \langle x, (T_1^* + T_2^*)(y) \rangle. \end{aligned}$$

Hieraus folgt (a). Die Teile (b), (c) und (d) verlaufen ähnlich leicht. ■

Eine Abbildung  $*$ :  $A \rightarrow A$  einer Algebra in sich, so dass die Eigenschaften (a), (b) und (c) erfüllt sind, heißt *Involution*, eine Algebra mit Involution heißt *\*-Algebra*. Wir haben gesehen, dass  $\mathcal{L}(H)$  eine nichtkommutative \*-Algebra ist. Ein Beispiel für eine kommutative \*-Algebra ist  $C(K)$ , die Algebra der stetigen Funktionen über einer kompakten Menge, wobei die Involution gegeben ist durch  $f^*(x) = \overline{f(x)}$ .

**Beispiel 5.2** (Fortsetzung von Beispiel 5.1)

(a)  $H = \mathbb{C}^n$ ,  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Dann gilt  $A^* = (\overline{a_{ji}})$  mit den Matrixelementen  $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ . Es ist nämlich

$$\langle Ax, y \rangle = \left\langle \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \overline{y_i} = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \sum_{i=1}^n \overline{a_{ij}} y_i = \sum_{j=1}^n x_j \overline{(By)_j} = \langle x, By \rangle.$$

(b)  $H = L^2([0, 1])$ ,  $T_g^* = T_{\overline{g}}$ .

(c)  $H = L^2(\mathbb{R})$ ,  $V_a(f)(t) = f(t - a)$  (Verschiebungsoperator),  $V_a^* = V_{-a}$ .

(d)  $H = \ell_2$ . Der *Rechts-Shift*  $S$  war gegeben durch  $S((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$ . Wir berechnen seinen Adjungierten.

$$\langle S(x), y \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} x_{n-1} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_{n+1} = \langle (x_1, x_2, \dots), (y_2, y_3, \dots) \rangle = \langle (x_n), S^*((y_n)) \rangle.$$

Also ist  $S^*((y_n)) = (y_2, y_3, \dots)$ , das ist der *Links-Shift*.

(e) Multiplikation  $(x_n) \mapsto (\alpha_n x_n)$  in  $\ell_2$ . (siehe ÜA 2.1)

### 5.3.3 Klassen beschränkter linearer Operatoren

Es sei  $H$  ein *komplexer* Hilbertraum.

#### (a) Selbstadjungierte und normale Operatoren

In der Quantenmechanik spielen die (unbeschränkten) selbstadjungierten Operatoren die wichtigste Rolle.

**Definition 5.3** Ein Operator  $A \in \mathcal{L}(H)$  heißt

(a) *selbstadjungiert*, falls  $A^* = A$ ,

(b) *normal*, falls  $A^*A = AA^*$ ,

ein selbstadjungierter Operator  $A$  heißt *positiv*, falls für alle  $x \in H$  gilt  $\langle A(x), x \rangle \geq 0$ . In diesem Fall schreiben wir  $A \geq 0$ . Sind  $A$  und  $B$  selbstadjungiert, so schreiben wir  $A \geq B$ , falls  $A - B \geq 0$ .

Bei vielen Eigenschaften spielen die *Polarisierungsidentitäten* eine wichtige Rolle. In einem (reellen oder komplexen) Hilbertraum erhält man das innere Produkt auch aus der Norm zurück:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left( \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right), \quad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}. \quad (5.9)$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left( \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 \right), \quad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \quad (5.10)$$

Im Falle eines *komplexen* Hilbertraumes kann man in ähnlicher Weise  $\langle A(x), y \rangle$  durch Terme der Form  $\langle A(z), z \rangle$  ausdrücken. Im reellen Hilbertraum geht das nicht.

$$4 \langle A(x), y \rangle = \langle A(x + y), x + y \rangle - \langle A(x - y), x - y \rangle + i \langle A(x + iy), x + iy \rangle - i \langle A(x - iy), x - iy \rangle. \quad (5.11)$$

Diese Identität wird in folgender Weise ausgenutzt:

$$\langle A(x), x \rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in H \text{ liefert } A = 0.$$

Tatsächlich folgt aus (5.11), dass  $\langle A(x), y \rangle = 0$  für alle  $x, y \in H$ . Insbesondere gilt dies für  $y = A(x)$ , so dass  $\|A(x)\| = 0$ , also  $A(x) = 0$  für alle  $x \in H$  gilt; folglich ist  $A = 0$ .

**Bemerkung 5.1** (a)  $A$  ist normal genau dann, wenn  $\|A(x)\| = \|A^*(x)\|$  für alle  $x \in H$ . In der Tat, ist  $A$  normal, so gilt für alle  $x \in H$ , dass  $\langle A^*A(x), x \rangle = \langle AA^*(x), x \rangle$ , was zur Folge hat, dass  $\|A(x)\|^2 = \langle A(x), A(x) \rangle = \langle A^*(x), A^*(x) \rangle = \|A^*(x)\|^2$ . Umgekehrt folgt aus der Polarisierungsidentität  $\langle A^*A(x), x \rangle = \langle AA^*(x), x \rangle$   $\langle (A^*A - AA^*)(x), x \rangle = 0$  für alle  $x$ ; Folglich ist  $A^*A - AA^* = 0$ , was zu zeigen war.

(b) Summen und reelle skalare Vielfache von selbstadjungierten Operatoren sind selbstadjungiert.

(c) Das Produkt  $AB$  zweier selbstadjungierter Operatoren ist selbstadjungiert genau dann, wenn  $A$  und  $B$  kommutieren, das heißt,  $AB = BA$ .

(d)  $H$  sei komplexer Hilbertraum.  $A$  ist selbstadjungiert, genau dann, wenn  $\langle Ax, x \rangle$  für alle  $x \in H$  reell ist

*Beweis.* Sei  $A^* = A$ . Dann ist  $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} \in \mathbb{R}$  reell; Sei umgekehrt  $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$  also für alle  $x \in H$  gilt  $\langle A(x), x \rangle = \langle x, A(x) \rangle$ . Zusammen mit der Polarisierungsidentität (5.11) folgt dann  $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle$  für alle  $x, y$ ; also  $A^* = A$ . ■

### (b) Unitäre und isometrische Operatoren

**Definition 5.4** Es sei  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Dann heißt  $T$

- (a) *unitär*, falls  $T^*T = I = TT^*$ .
- (b) *isometrisch*, falls  $\|T(x)\| = \|x\|$  für alle  $x \in H$ .

**Satz 5.4** (a) *Es sei  $H$  ein komplexer Hilbertraum.  $T$  ist genau dann isometrisch, wenn  $T^*T = I$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  für alle  $x, y \in H$ .*

(b)  *$T$  ist genau dann unitär, wenn  $T$  isometrisch und surjektiv ist.*

(c) *Sind  $S, T$  unitär, dann sind auch  $ST$  und  $T^{-1}$ . Die unitären Operatoren auf  $H$  bilden also eine Gruppe; man bezeichnet sie mit  $U(H)$ .*

*Beweis.* (a)  $T$  isometrisch liefert  $\langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, x \rangle$  und weiter  $\langle (T^*T - I)(x), x \rangle = 0$  für alle  $x$ . Aus der Polarisierungsidentität folgt weiter  $T^*T = I$ ; also  $\langle (T^*T - I)(x), y \rangle = 0$ , für alle  $x, y \in H$ . Somit gilt  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ . Setzt man hier  $y = x$ , so erhält man, dass  $T$  isometrisch ist.

(b) Angenommen,  $T$  ist unitär. Aus  $T^*T = I$  folgt,  $T$  ist isometrisch. Wegen  $TT^* = I$  ist  $T$  surjektiv.

Sei nun  $T$  isometrisch und surjektiv. Aus isometrisch folgt, dass  $T(x) = 0$  sofort  $x = 0$  impliziert; Also ist  $T$  bijektiv und besitzt einen inversen Operator  $T^{-1}$ . Setzt man  $y = T^{-1}(z)$  in die Gleichung  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  ein, so hat man

$$\langle T(x), z \rangle = \langle x, T^{-1}(z) \rangle, \quad x, z \in H.$$

Folglich ist  $T^{-1} = T^*$  und somit  $T^*T = TT^* = I$ .

(c) einfach, siehe Übung 2. ■

Man beachte, dass jeder isometrische Operator beschränkt ist mit der Norm 1. Im Falle  $H = \mathbb{C}^n$  bezeichnet man die unitäre Gruppe mit  $U(n)$ . Im Falle  $H = \mathbb{R}^n$  (mit der euklidischen Metrik) bilden die unitären Operatoren die *orthogonale* Gruppe  $O(n)$ .

**Beispiel 5.3** (a) Explizit gilt  $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^*A = AA^* = E_n\}$  und  $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = AA^T = E_n\}$ , wobei  $E_n$  die  $n$ -reihige Einheitsmatrix sei.

(b)  $H = L^2(\mathbb{R})$ . Der Verschiebungsoperator  $V_a$  aus Beispiel 1 (b) ist unitär, denn  $V_a V_b = V_{a+b}$  und  $V_a^* = V_{-a}$ . In der Tat gilt für alle  $f, g \in H$

$$\langle V_a f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} V_a f(t) g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t-a) g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t+a) dt = \langle f, V_{-a}(g) \rangle.$$

(c) Der Multiplikationsoperator aus Beispiel 1 (c),  $T_g f = g f$  ist genau dann unitär, selbstadjungiert bzw. positiv, wenn  $|g(t)| = 1$ ,  $g(t) \in \mathbb{R}$  bzw.  $g(t) \geq 0$  für alle  $t$ .

(f)  $H = \ell_2$ . Der Rechts-Shift  $S((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$  ist isometrisch aber nicht unitär, denn  $S$  ist nicht surjektiv; die Folge  $(1, 0, 0, \dots)$  liegt nicht im Bild von  $S$ . Der adjungierte Operator  $S^*$  (Links-Shift) ist nicht injektiv, denn  $S^*(1, 0, \dots) = 0$ ; also erst recht nicht isometrisch.

(h) **Die Fouriertransformation** Für  $f \in L^1(\mathbb{R})$  definieren wir

$$(\mathcal{F}f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist definiert, da  $|e^{-itx} f(x)| = |f(x)|$  für alle  $x, t \in \mathbb{R}$  und  $\int_{\mathbb{R}} |f| dx < \infty$ .

Es sei nun  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^n f^{(k)}(t)| < \infty, \forall n, k \in \mathbb{Z}_+\}$ . Dieser Funktionenraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R})$  heißt *Schwartzraum* nach dem französischen Mathematiker Laurent Schwartz (1915 – 2002, Fields-Medaille). Man nennt die Elemente von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R})$  auch die *schnell fallenden Funktionen*, da sie schneller als jede rationale Funktion  $1/x^n$  im Unendlichen gegen Null streben.

Es gilt  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , zum Beispiel ist  $f(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R})$ . Später werden wir zeigen, dass  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R})$  eine Bijektion ist, die das Skalarprodukt auf  $L^2(\mathbb{R})$  und die Norm erhält:

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle = \langle f, g \rangle, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}).$$

Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  auf dem Schwartzraum hat eine eindeutige Fortsetzung zu einem unitären Operator auf  $L^2(\mathbb{R})$ . Die Formel für die inverse Fouriertransformation lautet

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}).$$

### 5.3.4 Orthogonale Projektionen

#### (a) Riesz' Erster Satz

Es sei  $H_1$  ein abgeschlossener linearer Teilraum. Nach Satz V.1.10 (Riesz' Erster Satz) hat jedes  $x \in H$  eine eindeutige orthogonale Zerlegung  $x = x_1 + x_2$  mit  $x_1 \in H_1$  und  $x_2 \in H_1^\perp$ . Die Abbildung  $P_{H_1} : H \rightarrow H$ ,  $P_{H_1}(x) = x_1$ , ist linear.

In der Tat, sei  $y = y_1 + y_2$  eine weitere Zerlegung eines Vektors  $y \in H$  mit  $y_1 \in H_1$  und  $y_2 \in H_1^\perp$ , so gilt  $P(x+y) = P((x_1+y_1) + (x_2+y_2)) = x_1 + y_1 = P(x) + P(y)$ . außerdem gilt  $P(\lambda x) = P(\lambda x_1 + \lambda x_2) = \lambda x_1 = \lambda P(x)$ . Somit ist  $P$  linear. Die Beschränktheit wird in ÜA 2.4 gezeigt. Somit ist  $P_{H_1} \in \mathcal{L}(H)$ .  $P_{H_1}$  heißt die *orthogonale Projektion* von  $H$  auf  $H_1$ .

Offenbar ist  $H_1 = P_{H_1}(H)$  das Bild von  $H$  und  $P_{H_1}(H_1^\perp) = \{0\}$ , denn die orthogonalen Zerlegungen von Elementen aus  $H_1$  bzw. aus  $H_1^\perp$  lauten  $x_1 = x_1 + 0$  bzw.  $x_2 = 0 + x_2$ .

Beispiel für einen nicht-abgeschlossenen Teilraum von  $\ell_2$ : Es sei  $\varphi$  der Raum der finiten Folgen  $\varphi = \{(x_n) \mid x_k = 0 \text{ für fast alle } k\}$ . Dann gilt  $\varphi^\perp = \{0\}$  – es gibt keine  $\ell_2$ -Folge, die auf allen finiten Folgen orthogonal ist, denn  $\langle x, e_k \rangle = 0$  für alle  $k$  impliziert  $x_k = 0$ , also  $x = 0$ . Es gilt also  $\varphi \oplus \varphi^\perp \neq \ell_2$ .

Insbesondere ist  $P_{H_1}$  genau dann surjektiv, wenn  $H_1 = H$ ; In diesem Fall ist  $P_H = I$  die Identität auf  $H$ . Umgekehrt ist  $P_{H_1} = 0$  genau dann, wenn  $H_1 = \{0\}$ .

Wir zeigen die Beschränktheit von  $P_{H_1}$ . Für alle  $x \in H$ ,  $x = x_1 + x_2$ , gilt

$$\|P_{H_1}(x)\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2;$$

die letzte Gleichung ist der Pythagoras, der wegen  $x_1 \perp x_2$  anwendbar ist. Also ist  $\|P_{H_1}\| \leq 1$ . Falls  $H_1 \neq \{0\}$ , gibt es einen von Null verschiedenen Vektor  $x_1 \in H_1$  mit  $P_{H_1}(x_1) = x_1$ , also  $\|P_{H_1}(x_1)\| = \|x_1\|$ . Somit gilt  $\|P_{H_1}\| = 1$ .

Wir kommen zu einer *algebraischen* Beschreibung der orthogonalen Projektionen.

**Satz 5.5** *Ein linearer Operator  $P \in \mathcal{L}(H)$  ist eine orthogonale Projektion genau dann, wenn  $P^2 = P$  (Idempotenz) und  $P^* = P$  (Selbstadjungiertheit).*

*In diesem Falle ist  $H_1 = \{x \in H \mid P(x) = x\}$  der abgeschlossene Teilraum von  $H$ , auf den projiziert wird.*

*Beweis.*  $\rightarrow$  **in der Übung.** Es sei  $P = P_{H_1}$  die orthogonale Projektion auf  $H_1$ . Da  $P$  auf  $H_1$  die Identität ist, gilt für alle  $x \in H$ , dass  $P^2(x) = P(x_1) = x_1 = P(x)$ ; hierbei sei  $x = x_1 + x_2$  die orthogonale Zerlegung von  $x$  bezüglich  $H_1 \oplus H_1^\perp$ . Also  $P^2 = P$ . Sei ferner  $y = y_1 + y_2$  die entsprechende Zerlegung von  $y \in H$ . Dann ist

$$\langle P(x), y \rangle = \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \underbrace{\langle x_1, y_2 \rangle}_{=0} = \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 \rangle = \langle x, P(y) \rangle,$$

also,  $P^* = P$ .

$\leftarrow$ . Angenommen, es ist  $P^2 = P = P^*$ . wir setzen  $H_1 = \{x \mid P(x) = x\} = \text{Ker}(P - I)$ . Zunächst ist für  $P \neq 0$  der Raum  $H_1$  nicht nur der Nullvektor, denn es gilt ja wegen  $P^2 = P$  für alle  $x$ ,  $P(P(x)) = P(x)$  — der Bildraum von  $P$  ist also der Eigenraum zum Eigenwert 1 von  $P$ . Somit gilt  $P(H) \subset H_1$ . Da umgekehrt für alle  $z \in H_1$  gilt  $P(z) = z$ , ist  $H_1 \subset P(H)$  und somit  $H_1 = P(H)$ . Da  $P$  stetig ist, ist  $H_1$  ein abgeschlossener Teilraum von  $H$ ,  $H_1 = (P - I)^{-1}(\{0\})$ . Nach dem Rieszschen Zerlegungssatz, Satz V.1.10, gilt  $H = H_1 \oplus H_1^\perp$ . Wir werden zeigen, dass  $P = P_{H_1}$  die orthogonale Projektion auf  $H_1$  ist. Dazu müssen wir zeigen, dass für alle  $x \in H$  gilt,  $P(x) = x_1$ . Wegen  $P^2 = P$  ist  $P(P(x)) = P(x)$  für alle  $x$ , also ist  $P(x) \in H_1$ . Wir müssen nur noch zeigen, dass  $x - P(x) \in H_1^\perp$ , dann ist  $x = P(x) + (x - P(x))$  die gesuchte Orthogonalzerlegung von  $x$ . Sei  $z \in H_1$ , dann gilt

$$\langle x - P(x), z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle P(x), z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, P(z) \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, z \rangle = 0.$$

Folglich ist  $x - P(x) \in H_1^\perp$  und der Beweis ist komplett. ■

**Beispiel 5.4** (a) Es sei  $\{x_1, \dots, x_n\}$  ein NOS in  $H$  (ein normiertes Orthogonalsystem, also  $\langle x_i, x_k \rangle = \delta_{ik}$  für alle  $i, k$ ). Dann definiert

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle x_k, \quad x \in H,$$

die orthogonale Projektion  $P = P_{H_1} : H \rightarrow H$  auf  $H_1 = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ . In der Tat sind alle Elemente von  $H_1$  invariant unter  $P$ , denn für die Basiselemente gilt  $P(x_m) = \sum_{k=1}^n \langle x_m, x_k \rangle x_k = x_m$ , hieraus folgt  $P(x) = x$  für alle  $x \in H_1$ . Außerdem gilt für alle  $y \in H_1^\perp$  sofort  $P(y) = 0$ . Wegen der Linearität von  $P$  ist daher für alle  $z \in H$  mit orthogonaler Zerlegung  $z = z_1 + z_2$ ,  $P(z) = P(z_1 + z_2) = P(z_1) + P(z_2) = z_1$ . Somit gilt  $P = P_{H_1}$ .

(b) Es sei  $H = L^2([0, 1] \cup [2, 3])$ ,  $g \in C([0, 1] \cup [2, 3])$ . Für  $f \in H$  betrachten wir den Multiplikationsoperator  $T_g f = g f$ . Es ist  $T_g = (T_g)^*$  genau dann, wenn  $g(t) \in \mathbb{R}$  für alle  $t$ . Mehr noch,  $T_g$  ist idempotent und damit eine orthogonale Projektion, genau dann, wenn  $g(t)^2 = g(t)$ . Somit hat man  $g(t) = 0$  oder  $g(t) = 1$ . Da wir immer  $g$  als stetig vorausgesetzt haben bleiben nur 4 Fälle:  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = 1$ ,  $g_3 = \chi_{[0,1]}$  und  $g_4 = \chi_{[2,3]}$ .

Im Falle von  $g_3$  kann der Projektionsraum  $H_1$  identifiziert werden mit  $\mathcal{L}^2([0, 1])$ , da  $f \in H_1$  genau dann, wenn  $T_g f = f$  bzw. wenn  $g f = f$  also  $f(t) = 0$  für alle  $t \in [2, 3]$ .

### (b) Eigenschaften orthogonaler Projektionen

In diesem Abschnitt sei  $H$  ein Hilbertraum,  $H_1, H_2$  seien abgeschlossenen Teilräume und  $P_1$  und  $P_2$  seien die orthogonalen Projektionen auf  $H_1$  bzw.  $H_2$ .

Ohne vollständige Beweise, diese sind im Anhang I zu finden, fassen wir die wichtigsten Eigenschaften von orthogonalen Projektionen zusammen.

**Bemerkung 5.2** (i) Die folgenden drei Eigenschaften sind äquivalent:

- (a)  $P_1 + P_2$  ist eine Orthoprojektion. (b)  $P_1 P_2 = 0$ . (c)  $H_1 \perp H_2$ .

(ii) Die beiden folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

- (a)  $P_1 P_2$  ist eine orthogonale Projektion. (b)  $P_1 P_2 = P_2 P_1$ .

In diesem Falle ist  $P_1 P_2$  die Orthoprojektion auf  $H_1 \cap H_2$ .

(iii) Die folgenden sechs Eigenschaften sind untereinander äquivalent.

- (a)  $H_1 \subseteq H_2$ , (d)  $P_1 \leq P_2$ ,  
 (b)  $P_1 P_2 = P_1$ , (c)  $P_2 P_1 = P_1$ ,  
 (e)  $P_2 - P_1$  ist eine Orthoprojektion, (f)  $\|P_1(x)\| \leq \|P_2(x)\|$ ,  $x \in H$ .

*Beweis.* von (i), (a)  $\leftrightarrow$  (b). Sei  $P_1 + P_2$  eine Orthoprojektion, so ist diese Summe idempotent, das heißt,

$$P_1 + P_2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2^2 = P_1 + P_2 + P_1 P_2 + P_2 P_1.$$

Also gilt  $P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0$ . Multipliziert man diese Gleichung zunächst von rechts mit  $P_1$ , so hat man  $P_1 P_2 P_1 + P_2 P_1 = 0$  bzw.  $P_2 P_1 = -P_1 P_2 P_1$ . Multipliziert man sie aber von links mit  $P_1$ , so hat man analog  $P_1 P_2 = -P_1 P_2 P_1$ . Addiert man diese beiden Gleichungen und beachtet  $P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0$ , so hat man  $P_1 P_2 P_1 = P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ .

Ist umgekehrt  $P_1 P_2 = 0$ , so folgt  $0 = 0^* = (P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1$ , also folgt  $(P_1 + P_2)^2 = (P_1 + P_2)$  und  $(P_1 + P_2)^* = P_1 + P_2$  und  $P_1 + P_2$  ist somit Projektor. ■

### 5.3.5 Spektrum und Resolvente

Es sei  $T \in \mathcal{L}(H)$  ein beschränkter linearer Operator auf  $H$ .

#### (a) Definitionen und Beispiele

**Definition 5.5** (a) Die *Resolventenmenge* von  $T$ , bezeichnet mit  $\rho(T)$ , ist die Menge aller komplexen  $\lambda \in \mathbb{C}$  so dass ein beschränkter linearer Operator  $R_\lambda(T) \in \mathcal{L}(H)$  existiert, der auf ganz  $H$  definiert ist und für den gilt

$$R_\lambda(T)(T - \lambda I) = (T - \lambda I)R_\lambda(T) = I,$$

m.a.W.  $T - \lambda I$  hat einen beschränkten (stetigen) inversen Operator  $R_\lambda(T)$ . Wir nennen  $R_\lambda(T)$  die *Resolvente* von  $T$  an der Stelle  $\lambda$ .

(b) Die Komplementmenge  $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$  heißt *Spektrum* von  $T$ .

(c)  $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt *Eigenwert* von  $T$  falls ein von Null verschiedener Vektor  $x \neq 0$  existiert, ein *Eigenvektor*, so dass  $T(x) = \lambda x$ . Die Menge der Eigenwerte von  $T$  bezeichnet man als *Punktspektrum*  $\sigma_p(T)$  von  $T$ .

**Bemerkung 5.3** (a) Äquivalent zu „ $x$  ist Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ “ ist, dass  $(T - \lambda I)x = 0$  bzw.  $x \in \text{Ker}(T - \lambda I)$ .

(b) Das Punktspektrum ist Teilmenge des Spektrums,  $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$ . Beweis. Angenommen,  $\lambda$  sei ein Eigenwert von  $T$  mit Eigenvektor  $y$ , der nicht zum Spektrum gehört. Dann existiert ein beschränkter linearer Operator  $R_\lambda(T) \in \mathcal{L}(H)$  mit

$$y = R_\lambda(T)(T - \lambda I)(y) = R_\lambda(T)(0) = 0;$$

dies widerspricht aber der Definition des Eigenvektors (immer von Null verschieden). Folglich liegt jeder Eigenwert im Spektrum.

(c)  $\lambda \in \sigma_p(T)$  ist äquivalent zu  $T - \lambda I$  ist nicht injektiv (der Kern ist ungleich Null). Es kann auch der Fall eintreten, dass  $T - \lambda I$  nicht surjektiv ist, auch hier gilt dann  $\lambda \in \sigma(T)$  (vgl. Beispiel 5.5 (b) unten).

**Beispiel 5.5** (a)  $H = \mathbb{C}^n$ ,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Da  $H$  endlichdimensional ist, ist  $A$  surjektiv genau dann, wenn  $A$  injektiv ist, genau dann, wenn  $A$  bijektiv ist. Folglich ist  $A - \lambda E$  genau dann invertierbar, wenn  $\lambda$  kein Eigenwert ist. Die Begriffe Spektrum und Punktspektrum fallen hier zusammen:  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ .

(b)  $H = L^2([0, 1])$ .  $(Tf)(x) = xf(x)$ . Dieser Multiplikationsoperator besitzt *keinen* Eigenwert. Wir haben

$$\sigma_p(T) = \emptyset.$$

Angenommen,  $\lambda$  ist ein Eigenwert von  $T$  mit Eigenfunktion  $f \in \mathcal{L}^2([0, 1])$  Dann ist  $T(f) = \lambda f$  im  $\mathcal{L}^2$  also  $xf(x) = \lambda f(x)$  bzw  $(x - \lambda)f(x) = 0$  fast überall auf  $[0, 1]$ . Da aber  $x - \lambda \neq 0$  fast überall, muss  $f(x) = 0$  fast überall auf  $[0, 1]$  sein. Das heißt aber  $f = 0$  in  $H$  was der Definition des Eigenvektors widerspricht.

Es gilt ferner

$$\mathbb{C} \setminus [0, 1] \subseteq \rho(T) \Leftrightarrow \sigma(T) \subset [0, 1].$$

Es sei  $\lambda \notin [0, 1]$ . Da  $x - \lambda \neq 0$  für alle  $x \in [0, 1]$ , ist die Funktion  $g(x) = \frac{1}{x - \lambda}$  eine stetige und damit beschränkte Funktion auf  $[0, 1]$ .

Folglich ist der Multiplikationsoperator

$$(R_\lambda f)(x) = \frac{1}{x - \lambda} f(x)$$

ein beschränkter linearer Operator auf  $H$  (siehe ÜA 2.2). Er ist in der Tat der zu  $(T - \lambda I)$  inverse Operator, denn für alle  $f \in H$  ist

$$(T - \lambda I) \left( \frac{1}{x - \lambda} f(x) \right) = (x - \lambda) \left( \frac{1}{x - \lambda} f(x) \right) = f(x).$$

Schließlich zeigen wir, dass tatsächlich alle Punkte des Einheitsintervalls zum Spektrum gehören:

$$\sigma(T) = [0, 1].$$

Angenommen, es existiert ein  $\lambda \in \rho(T) \cap [0, 1]$ . Dann gibt es die Resolvente am Punkt  $\lambda$   $R_\lambda \in \mathcal{L}(H)$  mit

$$R_\lambda(T - \lambda I) = I. \quad (5.12)$$

Nach ÜA 2.2 und der 2. Übung ist die Operatornorm des Multiplikationsoperators  $T_g$  kleiner oder gleich  $\|g\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)|$ . Wir wählen  $f_\varepsilon = \chi_{(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)}$ . Da  $\chi_M = \chi_M^2$ , für alle  $M$ , gilt

$$\|(T - \lambda I)f_\varepsilon\| = \|(x - \lambda)f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x)\| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |(x - \lambda)f_\varepsilon(x)| \|f_\varepsilon\|.$$

Andererseits ist aber

$$\sup_{x \in [0, 1]} |(x - \lambda)\chi_{(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)}(x)| = \sup_{\lambda - \varepsilon < x < \lambda + \varepsilon} |x - \lambda| = \varepsilon.$$

Folglich ist

$$\|(T - \lambda I)f_\varepsilon\| \leq \varepsilon \|f_\varepsilon\|.$$

Setzt man nun  $f_\varepsilon$  in (5.12) ein, so hat man

$$\|f_\varepsilon\| = \|R_\lambda(T - \lambda I)f_\varepsilon\| \leq \|R_\lambda\| \|(T - \lambda I)f_\varepsilon\| \leq \|R_\lambda\| \varepsilon \|f_\varepsilon\|$$

was zur Folge hat, dass  $\|R_\lambda\| \geq 1/\varepsilon$ . Dies ist aber ein Widerspruch zur Beschränktheit von  $R_\lambda$  da  $\varepsilon > 0$  beliebig klein ist.

### (b) Eigenschaften des Spektrums

**Lemma 5.6** *Es sei  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Dann gilt*

$$\sigma(T^*) = \sigma(T)^*, \quad (\text{Komplexe Konjugation}) \quad \rho(T^*) = \rho(T)^*.$$

*Beweis.* Es sei  $\lambda \in \rho(T)$ . Dann existiert die Resolvente  $R_\lambda(T) \in \mathcal{L}(H)$ , so dass

$$\begin{aligned} R_\lambda(T)(T - \lambda I) &= (T - \lambda I)R_\lambda(T) = I \\ (R_\lambda(T)(T - \lambda I))^* &= ((T - \lambda I)R_\lambda)^* = I \\ (T^* - \bar{\lambda}I)R_\lambda(T)^* &= R_\lambda(T)^*(T^* - \bar{\lambda}I) = I. \end{aligned}$$

Das bedeutet aber, dass  $R_{\bar{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*$  ebenfalls ein beschränkter linearer Operator ist. Also ist  $\rho(T^*) \subseteq (\rho(T))^*$ . Da  $(T^{**} = T)$ , folgt auch die umgekehrte Inklusion. Folglich ist  $\rho(T^*) = \rho(T)^*$ .

Da das Spektrum das Komplement der Resolventenmenge ist, folgt die analoge Gleichheit fürs Spektrum. ■

Für alle  $T$  und  $S$  und  $\lambda$  und  $\mu$  in der entsprechenden Resolventenmenge gilt (ohne Beweis):

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) - R_\mu(T) &= (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\mu(T)R_\lambda(T), \\ R_\lambda(T) - R_\lambda(S) &= R_\lambda(T)(S - T)R_\lambda(S). \end{aligned}$$

**Satz 5.7** (a)  $\rho(T)$  ist offen und  $\sigma(T)$  ist abgeschlossen.

(b) Wenn  $\lambda_0 \in \rho(T)$  und  $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ , dann ist  $\lambda \in \rho(T)$  und es gilt

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}.$$

(c) Wenn  $|\lambda| > \|T\|$ , dann liegt  $\lambda$  in der Resolventenmenge,  $\lambda \in \rho(T)$  und

$$R_\lambda(T) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n.$$

*Beweis.* (a) folgt aus (b), denn mit jedem  $\lambda_0 \in \rho(T)$  ist auch eine kleine Umgebung in  $\rho(T)$ ; die Resolventenmenge ist also offen.

(b) Zur Abkürzung schreiben wir einfach  $R_{\lambda_0}$  anstelle von  $R_{\lambda_0}(T)$ . Wir setzen  $q := |\lambda - \lambda_0| \|R_{\lambda_0}(T)\|$  und haben somit  $q \in (0, 1)$ . Daher gilt, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n \|R_{\lambda_0}\|^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \|R_{\lambda_0}\| = \frac{\|R_{\lambda_0}\|}{1 - q}$$

absolut konvergiert. Wir setzen  $T_n = (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}$ . Nach Übungsaufgabe 3.4 (a) und der Vollständigkeit von  $\mathcal{L}(H)$  konvergiert wegen  $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\| < \infty$  dann auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ . Folglich konvergiert in der Operatornorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}$$

in  $\mathcal{L}(H)$  gegen einen beschränkten linearen Operator, sagen wir,  $B$ . Für dieses  $B$  gilt:

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)B &= (T - \lambda_0 I)B - (\lambda - \lambda_0)B \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (T - \lambda_0 I)R_{\lambda_0}^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{n+1} R_{\lambda_0}^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{n+1} R_{\lambda_0}^{n+1} \\ &= (\lambda - \lambda_0)^0 R_{\lambda_0}^0 = I. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass  $B(T - \lambda I) = I$ . Also ist  $R_{\lambda}(T) = B$ .

(c) Wegen  $|\lambda| > \|T\|$  und daher  $|\lambda|^{-1} \|T\| < 1$ , konvergiert die Reihe in der Operatornorm gegen einen beschränkten linearen Operator, etwa gegen  $C$ :

$$C = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n.$$

Es gilt

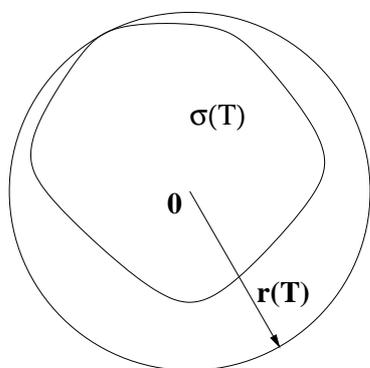
$$(T - \lambda I)C = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n = \lambda^0 T^0 = I.$$

Ähnlich zeigt man, dass  $C(T - \lambda I) = I$ ; also ist  $R_{\lambda}(T) = C$ . ■

**Bemerkung 5.4** (a) Nach (b) ist die Funktion  $R_{\lambda}(T)$  als Funktion von  $\lambda \in \rho(T) \subset \mathbb{C}$  komplex-differenzierbar mit Werten in  $\mathcal{L}(H)$ . Da  $\|R_{\lambda}(T)\|$ ,  $\lambda \in \rho(T)$  beschränkt und nicht konstant ist, folgt nach dem Satz von Liouville, dass  $\rho(T) \neq \mathbb{C}$ . Folglich ist das Spektrum jedes beschränkten linearen Operators nicht leer,  $\sigma(T) \neq \emptyset$ .

(b) Falls  $\|T\| < 1$ , ist  $T - I$  invertierbar mit  $(T - I)^{-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} T^n$  (Neumannsche Reihe).

(c) Satz 5.7 (c) bedeutet: Wenn  $\lambda \in \sigma(T)$ , dann ist  $|\lambda| \leq \|T\|$ . Das heißt, dass das Spektrum immer im Kreis um 0 mit Radius  $\|T\|$  enthalten ist. Im Allgemeinen gibt es aber einen kleineren Kreis vom Radius  $r(T)$  um 0, der das Spektrum schon ganz enthält. Diese Zahl  $r(T)$  nennt man den *Spektralradius* von  $T$  und es ist nach Definition der kleinste Radius, so dass der Kreis um Null mit diesem Radius das Spektrum enthält:



$$r(T) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

(d) Aus  $\lambda \in \sigma(T)$  folgt das  $\lambda^n \in \sigma(T^n)$  für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ . Angenommen  $\lambda^n \in \rho(T^n)$ , dann existiert ein beschränkter linearer Operator  $B$  mit  $B(T^n - \lambda^n) = (T^n - \lambda^n)B = I$ . Somit ist,

$$I = B(T^n - \lambda^n) = B \sum_{k=0}^n T^k \lambda^{n-1-k} (T - \lambda) = (T - \lambda)CB = I;$$

und damit  $\lambda \in \rho(T)$  im Widerspruch zur Annahme, dass  $\lambda \in \sigma(T)$ .

Hieraus folgt insbesondere, dass  $|\lambda|^n \leq \|T^n\|$  bzw.  $|\lambda| \leq \|T^n\|^{1/n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Somit gilt  $\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\} \leq \|T^n\|^{1/n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit  $r(T) \leq \inf\{\|T^n\|^{1/n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Es gilt sogar Gleichheit.

**Satz 5.8** *Es sei  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Dann gilt für den Spektralradius  $r(T)$  von  $T$ ,*

$$r(T) = \inf\{\|T^n\|^{1/n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}. \quad (5.13)$$

Der Beweis ist im Anhang.

### 5.3.6 Das Spektrum von selbstadjungierten Operatoren

**Satz 5.9** *Es sei  $T = T^*$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Dann gilt  $\lambda \in \rho(T)$  genau dann, wenn es ein  $C > 0$  gibt mit*

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq C \|x\|, \quad \forall x \in H.$$

*Beweis.* Angenommen,  $\lambda \in \rho(T)$ . Dann existiert die (von 0 verschiedene) beschränkte Resolvente bei  $\lambda$ , nämlich  $R_\lambda(T)$ , sodass

$$\|x\| = \|R_\lambda(T)(T - \lambda I)x\| \leq \|R_\lambda(T)\| \|(T - \lambda I)x\|.$$

Folglich ist

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq \frac{1}{\|R_\lambda(T)\|} \|x\|, \quad x \in H.$$

Daher kann man  $C = 1/\|R_\lambda(T)\|$  wählen und die Bedingung des Satzes ist erfüllt.

Sei nun umgekehrt die Bedingung des Satzes erfüllt. Wir zeigen in 3 Schritten, dass  $T - \lambda I$  einen beschränkten inversen Operator hat, der auf ganz  $H$  definiert ist.

*1. Schritt.*  $T - \lambda I$  ist injektiv. Angenommen, es gibt  $x_1, x_2 \in H$  mit  $(T - \lambda)x_1 = (T - \lambda)x_2$ . Somit gilt

$$0 = \|(T - \lambda)(x_1 - x_2)\| \geq C \|x_1 - x_2\|,$$

und damit  $\|x_1 - x_2\| = 0$  also  $x_1 = x_2$ . Somit ist  $T - \lambda I$  injektiv.

*2. Schritt*  $T - \lambda I$  hat ein abgeschlossenen Bildraum  $H_1 = (T - \lambda I)H$ .

Angenommen, eine Folge  $y_n = (T - \lambda I)x_n$ ,  $x_n \in H$ , konvergiert gegen einen gewissen Vektor  $y \in H$ . Wir wollen zeigen:  $y \in H_1$ . Natürlich ist  $(y_n)$  eine Cauchy-Folge, so dass  $\|y_m - y_n\| \rightarrow 0$  für  $m, n \rightarrow \infty$ . Nach der Voraussetzung des Satzes gibt es ein  $C > 0$  mit

$$\|y_m - y_n\| = \|(T - \lambda I)(x_n - x_m)\| \geq C \|x_n - x_m\|.$$

Somit ist auch  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge in  $H$ . Da  $H$  vollständig ist, konvergiert  $x_n \rightarrow x$  für ein gewisses  $x \in H$ . Da  $T - \lambda I$  stetig ist, konvergiert die Folge

$$y_n = (T - \lambda I)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)x.$$

gegen  $(T - \lambda I)x$ . Somit liegt  $y = (T - \lambda I)x$  in  $H_1$  und  $H_1$  ist abgeschlossen.

3. Schritt.  $H_1 = H$ . Nach dem Ersten Rieszschen Satz ist  $H = H_1 \oplus H_1^\perp$ . Wir müssen nur noch zeigen, dass  $H_1^\perp = \{0\}$ . Sei dazu  $u \in H_1^\perp$ , also, wegen  $T^* = T$ ,

$$0 = \langle (T - \lambda I)x, u \rangle = \langle x, (T - \bar{\lambda}I)u \rangle, \quad \text{für alle } x \in H.$$

Dies zeigt, dass  $(T - \bar{\lambda}I)u = 0$  und somit  $T(u) = \bar{\lambda}u$ . Folglich ist

$$\langle T(u), u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle.$$

Wegen  $T = T^*$  jedoch und Bemerkung 5.1 (d) folgt, dass  $\bar{\lambda} = \lambda$ ; also ist  $\lambda$  reell. Folglich gilt  $(T - \lambda I)u = 0$ . Wegen der Injektivität von  $T - \lambda I$  ist damit  $u = 0$ . Also gilt  $H_1 = H$ .

somit haben wir gezeigt, dass ein linearer, auf ganz  $H$  definierter Operator  $S = (T - \lambda I)^{-1}$  existiert. Wir zeigen seine Beschränktheit: Wegen

$$\|y\| = \|(T - \lambda I)S(y)\| \geq C \|S(y)\|,$$

ist  $S$  beschränkt mit  $\|S\| \leq 1/C$ . Also ist  $S = R_\lambda(T)$  die Resolvente zu  $T$  bei  $\lambda$ . ■

(a) Man beachte die folgenden Überlegungen, dass für eine reellwertige, beschränkte Funktion  $f(x, y)$  gilt

$$\sup_{x,y} f(x, y) = \sup_x (\sup_y f(x, y)) = \sup_y (\sup_x f(x, y)).$$

(b) Insbesondere ist  $\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle|$  da nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt  $\sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle| \leq \sup_{\|y\| \leq 1} \|x\| \|y\| = \|x\|$  und an der Stelle  $y = x/\|x\|$  wird das Supremum angenommen.

(c) Ferner ist  $\|T(x)\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle T(x), y \rangle|$ , sodass

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle T(x), y \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle T(x), y \rangle| = \sup_{\|y\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T(x), y \rangle|$$

Im Falle eines selbstadjungierten Operators können wir dies verallgemeinern.

**Satz 5.10** Es sei  $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$ . Dann gilt

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T(x), x \rangle|. \quad (5.14)$$

*Beweis.* Es sei  $C = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T(x), x \rangle|$ . Nach der CSU ist dann  $|\langle T(x), x \rangle| \leq \|T\| \|x\|^2$ , sodass  $C \leq \|T\|$ . Für jedes positive reelle  $\alpha > 0$  ist

$$\begin{aligned} \|T(x)\|^2 &= \langle T(x), T(x) \rangle = \langle T^2(x), x \rangle = \frac{1}{4} (\langle T(\alpha x + \alpha^{-1} T(x)), \alpha x + \alpha^{-1} T(x) \rangle - \\ &\quad - \langle T(\alpha x - \alpha^{-1} T(x)), \alpha x - \alpha^{-1} T(x) \rangle) \\ &\leq \frac{1}{4} (C \|\alpha x + \alpha^{-1} T(x)\|^2 + C \|\alpha x - \alpha^{-1} T(x)\|^2) \\ &\stackrel{\text{p. 4}}{=} \frac{C}{4} (2\|\alpha x\|^2 + 2\|\alpha^{-1} T(x)\|^2) = \frac{C}{2} (\alpha^2 \|x\|^2 + \alpha^{-2} \|T(x)\|^2). \end{aligned}$$

Setzt man  $\alpha^2 = \|T(x)\|/\|x\|$  ein, so hat man

$$= \frac{C}{2} (\|T(x)\|\|x\| + \|x\|\|T(x)\|)$$

woraus  $\|T(x)\| \leq C\|x\|$  folgt. Also gilt  $\|T\| = C$ . ■

Es seien  $m = \inf_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle$  und  $M = \sup_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle$  die *untere* bzw. *obere* Schranke von  $T$ .

Dann gilt:

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T(x), x \rangle| = \max\{|m|, M\} = \|T\|,$$

und

$$m\|x\|^2 \leq \langle T(x), x \rangle \leq M\|x\|^2, \quad \text{für alle } x \in H.$$

**Folgerung 5.11** *Es sei  $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$ . Dann gilt*

$$\sigma(T) \subset [m, M].$$

## 5.4 Anhang I: Orthogonale Projektionen

*Beweis* von Bemerkung 5.2. (i) (a)  $\rightarrow$  (b). Sei  $P_1 + P_2$  eine Projektion. Dann ist

$$(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 = P_1 + P_2 + P_1P_2 + P_2P_1 \stackrel{!}{=} P_1 + P_2,$$

also  $P_1P_2 + P_2P_1 = 0$ . Multiplikation von links und rechts mit  $P_1$  liefert

$$P_1P_2 + P_1P_2P_1 = 0 = P_1P_2P_1 + P_2P_1.$$

Hieraus folgt  $P_1P_2 = P_2P_1$  und letztlich  $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ .

(b)  $\rightarrow$  (c). Seien  $x_1 \in H_1$  und  $x_2 \in H_2$ . Dann ist

$$0 = \langle P_1P_2(x_2), x_1 \rangle = \langle P_2(x_2), P_1(x_1) \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle.$$

Also ist  $H_1 \perp H_2$ .

(c)  $\rightarrow$  (b). Seien  $x, z \in H$  beliebig. Dann ist

$$\langle P_1P_2(x), z \rangle = \langle P_2(x), P_1(z) \rangle = \langle x_2, z_1 \rangle = 0;$$

Also  $P_1P_2(x) = 0$  und folglich  $P_1P_2 = 0$ . Die selbe Argumentation funktioniert auch für  $P_2P_1 = 0$ .

(b)  $\rightarrow$  (a). Da aus  $P_1P_2 = 0$  folgt das  $P_2P_1 = 0$  (via  $H_1 \perp H_2$ ),

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2)^* &= P_1^* + P_2^* = P_1 + P_2, \\ (P_1 + P_2)^2 &= P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 = P_1 + 0 + 0 + P_2. \end{aligned}$$

■

*Beweis* von Bemerkung 5.2. (ii) (b)  $\rightarrow$  (a).  $(P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1 = P_1 P_2$ , nach Voraussetzung. Außerdem gilt  $(P_1 P_2)^2 = P_1 P_2 P_1 P_2 = P_1 P_1 P_2 P_2 = P_1 P_2$ , wodurch diese Richtung vollständig ist.

(a)  $\rightarrow$  (b).  $P_1 P_2 = (P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1$ .

Offensichtlich gilt  $P_1 P_2(H) \subseteq H_1$  und  $P_2 P_1(H) \subseteq H_2$ ; also  $P_1 P_2(H) \subseteq H_1 \cap H_2$ . Andererseits gilt für  $x \in H_1 \cap H_2$  das  $P_1 P_2 x = x$ . Dies zeigt  $P_1 P_2(H) = H_1 \cap H_2$ . ■

*Beweis* von Bemerkung 5.2. (iii) Wir zeigen (d)  $\rightarrow$  (c). Aus  $P_1 \leq P_2$  folgern wir das  $I - P_1 \leq I - P_2$ . Hierbei sind  $I - P_1$  und  $I - P_2$  orthogonale Projektionen auf  $H_1^\perp$  beziehungsweise  $H_2^\perp$ . Also gilt für alle  $x \in H$ :

$$\begin{aligned} \|(I - P_2)P_1(x)\|^2 &= \langle (I - P_2)P_1(x), (I - P_2)P_1(x) \rangle \\ &= \langle (I - P_2)^*(I - P_2)P_1(x), P_1(x) \rangle = \langle (I - P_2)P_1(x), P_1(x) \rangle \\ &\leq \langle (I - P_1)P_1(x), P_1(x) \rangle = \langle P_1(x) - P_1(x), P_1(x) \rangle = \langle 0, P_1(x) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Also  $\|(I - P_2)P_1(x)\|^2 = 0$ , woraus  $(I - P_2)P_1 = 0$  und letztlich  $P_1 = P_2 P_1$  folgt. ■

## 5.5 Anhang II: Kompakte, selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum

*Beweis* von Satz 5.8. Aus der Theorie über Potenzreihen wissen wir das die Reihe

$$-z \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| z^n \quad (5.15)$$

für  $|z| < R$  konvergiert und für  $|z| > R$  divergiert, wobei

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}}. \quad (5.16)$$

Einsetzen von  $z = 1/\lambda$  und unter Nutzung von Hausaufgabe 38.4, erhalten wir das

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n$$

divergiert falls  $|\lambda| < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$  (und konvergiert falls  $|\lambda| > \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$ ). Der Grund für die Divergenz der Potenzreihe ist, dass das Spektrum  $\sigma(T)$  und der Kreis mit dem Radius  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$  gemeinsame Punkte haben; also

$$r(T) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Andererseits folgt nach Bemerkung 5.4 (d),  $\lambda \in \sigma(T)$  das  $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ ; also nach Bemerkung 5.4 (c),

$$|\lambda^n| \leq \|T^n\| \implies |\lambda| \leq \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Bildung des Supremums über allen  $\lambda \in \sigma(T)$  auf der linken Seite und des  $\underline{\lim}$  über allen  $n$  auf der rechten Seite, liefert uns

$$r(T) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = r(T).$$

Also konvergiert die Folge  $\sqrt[n]{\|T^n\|}$  gegen  $r(T)$  wenn  $n$  gegen  $\infty$  geht. ■

*Beweis* von Folgerung 5.11. Angenommen,  $\lambda_0 \notin [m, M]$ . Dann ist

$$C := \inf_{\mu \in [m, M]} |\lambda_0 - \mu| > 0.$$

Da  $m = \inf_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle$  und  $M = \sup_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle$  erhalten wir für  $\|x\| = 1$

$$\|(T - \lambda_0 I)x\| = \|x\| \|(T - \lambda_0 I)x\| \underset{\text{CSU}}{\geq} |\langle (T - \lambda_0 I)x, x \rangle| = \left| \underbrace{\langle T(x), x \rangle}_{\in [m, M]} - \underbrace{\lambda_0 \|x\|^2}_1 \right| \geq C.$$

Hieraus folgt

$$\|(T - \lambda_0 I)x\| \geq C \|x\| \quad \text{für alle } x \in H.$$

Nach Satz 5.9,  $\lambda_0 \in \rho(T)$ . ■

**Beispiel 5.6** (a) Es sei  $H = L^2[0, 1]$  und  $g \in C[0, 1]$  eine reellwertige stetige Funktion;  $(T_g f)(t) = g(t)f(t)$ . Wenn  $m = \inf_{t \in [0, 1]} g(t)$  und  $M = \sup_{t \in [0, 1]} g(t)$ , dann erhält man, dass  $m$  bzw.  $M$  die untere und oberen Schranken von  $T_g$  sind. Also gilt  $\sigma(T_g) \subseteq [m, M]$ . Wegen des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen, nimmt  $g$  jeden Wert in  $[m, M]$  mindestens einmal an. Hieraus folgt, dass  $\sigma(T_g) = [m, M]$ .

(b) Es sei  $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$ . Dann sind alle Eigenwerte von  $T$  reell und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen aufeinander orthogonal: *Beweis*. Die erste Behauptung folgt sofort aus Folgerung 5.11. Sei nun  $T(x) = \lambda x$  und  $T(y) = \mu y$  mit  $\lambda \neq \mu$ . Dann gilt

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

Wegen  $\lambda \neq \mu$ ,  $\langle x, y \rangle = 0$ . ■

Dieser Satz gilt für beliebige *normale* Operatoren.

Kompakte Operatoren haben ähnliche Eigenschaften wie Operatoren mit endlichem Bildraum.

**Definition 5.6** Ein Operator  $T \in \mathcal{L}(H)$  heißt *kompakt*, falls der Abschluss  $\overline{T(U_1)}$  des Bildes der Einheitskugel  $U_1 = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$  in  $H$  kompakt ist. Mit anderen Worten, für jede Folge  $(x_n)$ ,  $x_n \in U_1$ , gibt es eine Teilfolge, so dass  $T(x_{n_k})$  konvergiert.

**Satz 5.12** Für  $T \in \mathcal{L}(H)$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $T$  ist kompakt.
- (b)  $T^*$  ist kompakt.
- (c) Für alle Folgen  $(x_n)$  für die  $(\langle x_n, y \rangle) \rightarrow \langle x, y \rangle$  für alle  $y \in H$  konvergiert, gilt, dass  $T(x_n) \rightarrow T(x)$ .
- (d) Es gibt eine Folge  $(T_n)$  von Operatoren mit endlichem Bildraum, sodass  $\|T - T_n\| \rightarrow 0$ .

**Definition 5.7** Es sei  $T$  ein Operator auf  $H$  und  $H_1$  ein abgeschlossener Teilraum von  $H$ . Wir nennen  $H_1$  einen *reduzierenden Teilraum*, falls sowohl  $H_1$  als auch  $H_1^\perp$   $T$ -invariant sind, das heißt,  $T(H_1) \subset H_1$  und  $T(H_1^\perp) \subset H_1^\perp$ .

**Satz 5.13** Es sei  $T \in \mathcal{L}(H)$  normal.

- (a) Der Eigenraum  $\text{Ker}(T - \lambda I)$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist ein reduzierender Teilraum. Es gilt  $\text{Ker}(T - \lambda I) = \text{Ker}(T - \lambda I)^*$ .
- (b) Sind  $\lambda, \mu$  verschiedene Eigenwerte von  $T$ , dann ist  $\text{Ker}(T - \lambda I) \perp \text{Ker}(T - \mu I)$ .

*Beweis.* (a) Da  $T$  normal ist, ist auch  $T - \lambda$  normal. Folglich ist  $\|(T - \lambda)(x)\| = \|(T - \lambda)^*(x)\|$  und damit  $\text{Ker}(T - \lambda) = \text{Ker}(T - \lambda)^*$ . Insbesondere ist  $T^*(x) = \bar{\lambda}x$  für alle  $x \in \text{Ker}(T - \lambda I)$ . Wir zeigen die Invarianz. Sei  $x \in \text{Ker}(T - \lambda)$ ; dann ist  $T(x) = \lambda x \in \text{Ker}(T - \alpha I)$ . Analog folgt aus  $x \in \text{Ker}(T - \lambda I)^\perp, y \in \text{Ker}(T - \lambda I)$

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle = \langle x, \bar{\lambda}y \rangle = 0.$$

Somit gilt  $\text{Ker}(T - \lambda I)^\perp$  ist  $T$ -invariant.

- (b) Es sei  $T(x) = \lambda x$  und  $T(y) = \mu y$ . Nach (a) und nach  $T^*(y) = \bar{\mu}y$  folgt

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle = \langle x, \bar{\mu}y \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

Also  $(\lambda - \mu)\langle x, y \rangle = 0$ ; wegen  $\lambda \neq \mu$  haben wir  $x \perp y$ . ■

**Theorem 5.14 (Spektraltheorem für kompakte selbstadjungierte Operatoren)** Es sei  $H$  ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum und  $T \in \mathcal{L}(H)$  ein kompakter selbstadjungierter Operator.

Dann existiert eine Folge reeller Zahlen  $(\lambda_n)$  mit  $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  und ein VNOS  $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{f_k \mid k \in N \subset \mathbb{N}\}$  derart, dass

$$T(e_n) = \lambda_n e_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad T(f_k) = 0, \quad k \in N.$$

Außerdem ist

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in H. \quad (5.17)$$

**Bemerkung 5.5** (a) Da  $\{e_n\} \cup \{f_k\}$  ein vollständiges Orthonormalsystem ist, lässt sich  $x \in H$  als Fourier-Reihe schreiben

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n + \sum_{k \in N} \langle x, f_k \rangle f_k.$$

Wendet man darauf  $T$  an, benutzt  $T(e_n) = \lambda_n e_n$  und die Stetigkeit von  $T$ , so hat man

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle T(e_n) + \sum_{k \in N} \langle x, f_k \rangle \underbrace{T(f_k)}_{=0}$$

woraus (5.17) folgt. als hauptproblem ist der Nachweis der Existenz des VNOS.

(b) Im Falle  $H = \mathbb{C}^n$  ( $\mathbb{R}^n$ ) besagt das Theorem, dass sich jede hermitesche (symmetrische) Matrix  $A$  diagonalisieren lässt mit ausschließlich reellen Eigenwerten auf der Diagonale.

# Kapitel 6

## Partielle Differentialgleichungen I — Einführung

### 6.1 Klassifikation Partieller Differentialgleichungen (PDGL)

#### 6.1.1 Einführung

Es gibt keine allgemeine Theorie zur Lösbarkeit aller partieller Differentialgleichungen. Eine solche Theorie wird auch kaum jemals existieren aufgrund der riesigen Vielfalt an physikalischen, geometrischen, wahrscheinlichkeitstheoretischen Phänomenen, die durch PDGL modelliert werden. Daher konzentriert man sich auf das Studium von *speziellen* PDGL, welche reichhaltige Anwendungen in Mathematik und Physik haben.

**Definition 6.1** Eine *Partielle Differentialgleichung* (abgekürzt als PDGL) ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0, \quad (6.1)$$

wobei  $F$  eine gegebene Funktion der unabhängigen Variablen  $x, y, \dots$ , der unbekanntes Funktion  $u$  und einer endlichen Zahl von partiellen Ableitungen von  $u$  ist.

Wir nennen  $u$  eine *Lösung* von (6.1), falls nach Einsetzen von  $u(x, y, \dots)$  und ihren partiellen Ableitungen die Gleichung (6.1) identisch erfüllt ist in einem gewissen Gebiet  $\Omega$  des Raumes der unabhängigen Variablen  $x, y, \dots$ .

Die *Ordnung* der PDGL ist die Ordnung der höchsten Ableitung von  $u$ , die in  $F$  auftritt.

Eine PDGL heißt *linear*, falls sie linear in der unbekanntes Funktion  $u$  ist und deren partiellen Ableitungen  $u_x, u_y, u_{xy}, \dots$ . Die Koeffizienten dürfen höchstens von den Variablen  $x, y, \dots$  abhängen. M. a. W., eine lineare PDGL hat die Form

$$G(u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = f(x, y, \dots), \quad (6.2)$$

mit einer Funktion  $f$  rechts, die nur von den Variablen  $x, y, \dots$  abhängt und einer Funktion  $G$ , die linear ist in allen Komponenten mit Koeffizienten, die nur von  $x, y, \dots$  abhängen.

Genauer gesagt, der *Differentialoperator*  $L(u) = G(u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots)$ , der jeder Funktion  $u(x, y, \dots)$  eine neue Funktion  $L[u](x, y, \dots)$  zuordnet ist linear von  $C^k(\Omega) \rightarrow C^{k-1}(\Omega)$ . Dabei sei  $k$  die Ordnung der PDGl.

Die lineare PDGl (6.2) ( $L(u) = f$ ) heißt *homogen*, falls  $f = 0$  und *inhomogen* sonst. Zum Beispiel ist  $\cos(xy^2)u_{xxy} - y^2u_x + u \sin x + \tan(x^2 + y^2) = 0$  eine lineare inhomogene PDGl dritter Ordnung; die zugehörige homogene lineare PDGl lautet  $\cos(xy^2)u_{xxy} - y^2u_x + u \sin x = 0$ .

Eine PDGl heißt *quasilinear*, falls sie linear in allen höchsten partiellen Ableitungen der Ordnung  $m$  ist ( $m$  sein die Ordnung) mit Koeffizientenfunktionen, die nur von  $x, y, \dots$  abhängen und möglicherweise von partiellen Ableitungen von  $u$ , deren Ordnung kleiner als  $m$  ist.

So ist z. B.  $u_x u_{xx} + u^2 = 0$  quasilinear,  $u_{xy} u_{xx} + 1 = 0$  jedoch nicht.

Eine quasilineare Gleichung heißt *semilinear*, falls die Koeffizienten vor den Ableitungen höchster Ordnung nur Funktionen in den unabhängigen Variablen  $x, y, \dots$  sind. So ist etwa  $\sin x u_{xx} + u^2 = 0$  semilinear;  $u_x u_{xx} + u^2 = 0$  jedoch nicht.

Mitunter betrachtet man auch *Systeme* von PDGln, in denen eine oder mehrere unbekannte Funktionen sowie deren partielle Ableitungen auftreten.

### 6.1.2 Beispiele

- (1) Die **Laplacegleichung** in  $n$  Dimensionen ist eine lineare, homogene PDGl zweiter Ordnung

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} = 0$$

für eine Funktion  $u = u(x_1, \dots, x_n)$ . Ihre Lösungen  $u$  heißen *harmonische Funktionen*. Im Falle  $n = 2$  ordnen wir jeder harmonischen Funktion  $u(x, y)$  ihre „konjugierte“ harmonische Funktion  $v(x, y)$  zu. Diese ist durch das partielle Differentialgleichungssystem erster Ordnung den so genannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

eindeutig bestimmt. Jedes Lösungspaar reeller Funktionen  $(u, v)$  liefert eine analytische (holomorphe, komplex-differenzierbare) Funktion  $f(z) = u + iv$ .

Die Laplace-Gleichung ist die homogene Form der **Poissongleichung**

$$\Delta u = f, \quad \text{für eine gegebene Funktion } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Während die Laplace-Gleichung Gleichgewichtszustände beschreibt, ist die Poisson-Gleichung in der Elektrostatik von Bedeutung. Laplace- und Poisson-Gleichungen beschreiben beide *stationäre* Prozesse, also Phänomene, die nicht von der Zeit abhängen.

- (2) Die **Wärmeleitungsgleichung**. Bei dieser Gleichung ist eine Variable,  $t$ , als Zeitkoordinate ausgezeichnet, während die anderen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  die Ortskoordinaten repräsentieren. Es sei

$$u: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega \text{ offen im } \mathbb{R}^n,$$

wobei  $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$  die positive Zeitachse beschreibt. Die Wärmeleitungsgleichung lautet

$$k u_t = \Delta u, \quad \text{where} \quad \Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}.$$

Sie modelliert Wärmeleitungsprozesse und Diffusionsprozesse.

- (3) Die **Wellengleichung**. Mit den selben Bezeichnungen wie in (2) ist die Wellengleichung

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0.$$

Sie modelliert Wellen und andere Schwingungsprozesse.

- (4) Die **Korteweg-de-Vries-Gleichung**:

$$u_t - 6u u_x + u_{xxx} = 0;$$

sie modelliert die Wellenausbreitung in flachem Wasser.

- (5) Mit der **Monge-Ampère-Gleichung**

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = f$$

bestimmt man Flächen mit vorgegebener Krümmung  $f$ .

- (6) Die **Maxwellchen Gleichungen** für die elektrische Feldstärke  $E = (E_1, E_2, E_3)$  und die magnetische Feldstärke  $B = (B_1, B_2, B_3)$  als Funktionen von  $(t, x_1, x_2, x_3)$  lauten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} B &= 0, & (\text{magnetostatisches Gesetz}), \\ B_t + \operatorname{rot} E &= 0, & (\text{magnetodynamisches Gesetz}), \\ \operatorname{div} E &= 4\pi\rho, & (\text{elektrostatistisches Gesetz mit Ladungsdichte } \rho), \\ E_t - \operatorname{rot} B &= -4\pi j & (\text{elektrodynamisches Gesetz mit Stromdichte } j) \end{aligned}$$

- (7) Die **Navier-Stokes-Gleichungen** sind die Grundgleichungen der Strömungsmechanik. Es sei  $v(x, t) = (v^1, v^2, v^3)$  die Geschwindigkeit und  $p(x, t)$  der Druck einer inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  und Viskosität  $\eta$ :

$$\rho v_t^j + \rho \sum_{i=1}^3 v^i v_{x_i}^j - \eta \Delta v^j = -p_{x_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\operatorname{div} v = 0.$$

- (8) Die **Schrödinger-Gleichung**

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + V(x, u),$$

wobei  $m$  die Masse,  $V$  ein Potential,  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  die gesuchte Funktion sind. Formal ist die Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik ähnlich der Wärmeleitungsgleichung, insbesondere, wenn  $V = 0$ . Die imaginäre Einheit  $i$  als Faktor führt aber zu bedeutenden Unterschieden.

### Klassifikation

Wir haben oben sehr viele verschiedenen Typen von PDGI aufgeschrieben. Es ist hoffnungslos, *eine* Theorie entwickeln zu wollen, die alle diese Gleichungen simultan behandelt.

Wir wollen uns daher Kriterien überlegen, wie man diese mannigfachen Differentialgleichungen in Klassen einteilen könnte. Hier sind verschiedenen Möglichkeiten, dies zu tun.

(I) *Algebraisch.*

- (a) Lineare PDGI sind (1), (2), (3), (6) (erster Ordnung) und (8)
- (b) Semilineare Gleichungen sind (4) und (7)
- (c) Eine nicht-lineare Gleichung ist (5)

Üblicherweise sind linearer Gleichungen einfacher zu behandeln als nicht-lineare Gleichungen. Wir beschränken uns daher im wesentlichen auf lineare PDGI.

(II) Die *Ordnung* der Gleichung. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und die Maxwell-Gleichungen sind Systeme von PDGI erster Ordnung. Hingegen sind (1), (2), (3), (5), (7), (8) zweiter Ordnung; (4) ist von dritter Ordnung. Gleichungen höherer als dritter Ordnung treten seltener auf; die wichtigsten sind die Gleichungen zweiter Ordnung.

(III) *Elliptisch, parabolisch und hyperbolisch* Wir werden später zumindest die semilinearen PDGI zweiter Ordnung in diese drei Klassen einordnen. Prinzipiell sind alle PDGI zweiter Ordnung in zwei Variablen  $x, y$  lokal in diese drei Klassen einzuordnen.

(IV) Entsprechend ihrer *Lösbarkeit*. Wir betrachten die PDGI zweiter Ordnung  $F(x, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) = 0$  mit  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , und wollen zusätzliche Annahmen über  $u$  machen, welche typischer Weise vorgegebene Randwerte von  $u$  bzw. von seinen partiellen Ableitungen sind.

Idealer Weise erfüllt ein solches Problem, die folgenden drei Bedingungen und wurde nach Hadamard als *korrekt gestelltes Problem* bezeichnet:

- (a) Es existiert eine Lösung  $u$ .
- (b) Die Lösung ist eindeutig.
- (c) Die Lösung ist *stabil*. Das heißt, ändern sich die gegebenen Anfangsbedingungen stetig (Randwerte, Koeffizienten in der Gleichung, rechte Seite der Gleichung), dann ändert sich die Lösung ebenfalls stetig.

**Beispiel 6.1 (Zurückführen auf GDGI.)** In den folgenden Beispielen sei  $\Omega = \mathbb{R}^2$  und  $u = u(x, y)$ .

(a) Man ermittle alle Funktionen  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  mit  $u_{xx} = 0$ . *Lösung.* Zunächst integrieren wir diese Gleichung bezüglich  $x$  und erhalten, dass  $u_x$  bezüglich  $x$  konstant ist. Da über  $y$  gar keine Aussage gemacht ist, erhalten wir  $u_x = a(y)$ . Erneute Integration bzgl.  $x$  liefert, dass

$u$  linear in  $x$  ist,  $u(x, y) = xa(y) + b(y)$  mit beliebigen Funktionen  $a = a(y)$  und  $b = b(y)$ . Man beachte, dass die gewöhnliche DGI  $u'' = 0$  die allgemeine Lösung  $u(x) = ax + b$  mit konstanten Koeffizienten  $a, b$  hat. Nun sind die Koeffizienten jedoch *Funktionen* in  $y$ .

(b) Man löse  $u_{xx} + u = 0$ ,  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Die Lösung der zugehörigen gew. DGI  $u'' + u = 0$ ,  $u = u(x)$ ,  $u \in C^2(\mathbb{R})$ , lautet  $u(x) = a \cos x + b \sin x$ , so dass die allgemeine Lösung der obigen PDGI in zwei Variablen  $x$  und  $y$  gleich  $u(x, y) = a(y) \cos x + b(y) \sin x$  ist, wobei  $a$  und  $b$  beliebige Funktionen sind.

(c) Man löse  $u_{xy} = 0$ ,  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Man beachte, dass  $u_{xy} = (u_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right)$ . Zunächst integriert man die Gleichung  $\frac{\partial}{\partial y} (u_x) = 0$  bezüglich  $y$  und erhält  $u_x = \tilde{f}(x)$ . Integration bezüglich  $x$  führt dann auf  $u = \int \tilde{f}(x) dx + g(y) = f(x) + g(y)$ , wobei  $f$  differenzierbar ist und  $g$  beliebig.

## 6.2 PDGI erster Ordnung — Die Methode der Charakteristiken

Wir lösen eine PDGI 1. Ordnung durch die Methode der *Charakteristiken*. Sie ist anwendbar auf beliebige quasi-lineare Gleichungen

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (6.3)$$

insbesondere auf lineare Gleichungen

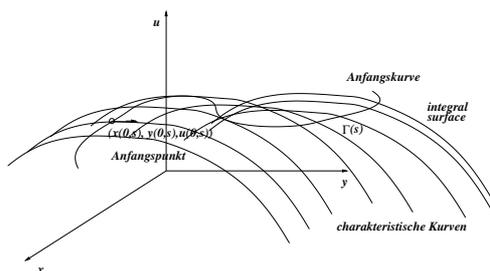
$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c_0(x, y)u + c_1(x, y). \quad (6.4)$$

Wir beschränken uns allerdings auf die lineare Gleichung zusammen mit einer *Anfangsbedingung*, welche als Kurve im  $xyu$ -Raum gegeben ist

$$\Gamma = \Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s)), \quad s \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

Die Kurve  $\Gamma$  heißt *Anfangskurve*. Die *Anfangsbedingungen* lauten dann

$$u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s), \quad s \in (a, b).$$



Die geometrische Idee dieser Methode ist folgende. Die Lösung  $u = u(x, y)$  kann als zweidimensionale Fläche im  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, u) \mid x, y, u \in \mathbb{R}\}$  aufgefasst werden. Ausgehend von einem Punkt der Anfangskurve konstruieren wir eine *charakteristische Kurve* in der Fläche  $u$ . Wenn wir dies für alle Punkte der Anfangskurve gemacht haben, erhalten wir eine einparametrische Schar von charakteristischen Kurven, die „zusammengeklebt“ die Fläche  $u$  ergeben.

Die lineare Gleichung (6.4) kann auch geschrieben werden als

$$(a, b, c_0 u + c_1) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0. \quad (6.6)$$

Zur Erinnerung:  $(u_x, u_y, -1)$  ist der Normalenvektor an die Fläche  $(x, y, u(x, y))$ . Also lautet die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkte  $(x_0, y_0, u_0)$

$$u - u_0 = u_x(x - x_0) + u_y(y - y_0) \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, u - u_0) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0.$$

Benutzt man nun die lineare PDGL (6.6), so erkennt man, dass  $(a, b, c_0 u + c_1)$  ein Vektor der Tangentialebene ist. Eine Kurve  $(x(t), y(t), u(t))$  mit genau diesen Tangentialvektoren

$$(x'(t), y'(t), u'(t)) = (a(x(t), y(t)), b(x(t), y(t)), c_0(x(t), y(t))u(t) + c_1(x(t), y(t)))$$

zu finden ist äquivalent zum Lösen der gewöhnlichen DGLn

$$x'(t) = a(x(t), y(t)), \quad (6.7)$$

$$y'(t) = b(x(t), y(t)), \quad (6.8)$$

$$u'(t) = c_0(x(t), y(t))u(t) + c_1(x(t), y(t)). \quad (6.9)$$

Diese Gleichungen sind die *charakteristischen Gleichungen* von (6.6). Ihre Lösungen sind die *charakteristischen Kurven* der partiellen DGL. Man beachte, dass das obige System autonom ist — es gibt keine explizite Abhängigkeit von  $t$ .

Um die charakteristischen Kurven zu bestimmen, braucht man Anfangsbedingungen. Wir fordern daher, dass die Anfangspunkte der charakteristischen Kurven auf der Anfangskurve  $\Gamma(s)$  liegen sollen. Da jede Kurve  $(x(t), y(t), u(t))$  von einem anderen Anfangspunkt  $\Gamma(s)$  heraus sich entwickelt, können wir die Kurven auch explizit in der Form  $(x(t, s), y(t, s), u(t, s))$  schreiben. Die Anfangsbedingungen lauten dann

$$x(0, s) = x_0(s), \quad y(0, s) = y_0(s), \quad u(0, s) = u_0(s).$$

Man beachte, dass wir den Parameter  $t$  so gewählt haben, dass die Punkte der charakteristischen Kurven zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf der Anfangskurve liegen. Man beachte außerdem, dass durch die Parametrisierung  $(x(t, s), y(t, s), u(t, s))$  eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$  dargestellt wird.

Die Methode der Charakteristiken ist auch auf semi-lineare Gleichungen anwendbar.

Fazit: Im ersten Schritt zeichnen wir eine Anfangskurve  $\Gamma(s)$  aus. Im zweiten Schritt wählen wir einen variablen Punkt  $s$  auf  $\Gamma$  als Anfangspunkt und lösen das Anfangswertproblem zum System von charakteristischen Gleichungen.

Haben wir dies für alle Punkte der Anfangskurve getan, erhalten wir den Ausschnitt aus einer Fläche, die so genannte *Integralfläche*. Sie ist die Vereinigung der charakteristischen Kurven.

**Beispiel 6.2** 1. Man löse die PDGL

$$u_x + u_y = 2$$

bezüglich der Anfangsbedingung  $u(x, 0) = x^2$ . Die charakteristischen Gleichungen und die parametrische Form der Anfangskurve lauten

$$\begin{aligned} x_t(t, s) &= 1, & y_t(t, s) &= 1, & u_t(t, s) &= 2, \\ x(0, s) &= s, & y(0, s) &= 0, & u(0, s) &= s^2. \end{aligned}$$

Die charakteristischen Gleichungen sind leicht gelöst:

$$x(t, s) = t + f_1(s), \quad y(t, s) = t + f_2(s), \quad u(t, s) = 2t + f_3(s).$$

Setzt man noch die Anfangsbedingungen ein, so hat man

$$x(t, s) = t + s, \quad y(t, s) = t, \quad u(t, s) = 2t + s^2.$$

Dies ist die parametrische Form der Integralfläche. Um eine explizite Form zu erhalten, müssen wir die obigen Gleichungen  $(x(t, s), y(t, s))$  nach  $s$  und  $t$  auflösen. Das heißt, wir müssen  $(t(x, y), s(x, y))$  ermitteln. Im obigen Beispiel wäre das  $t = y$ ,  $s = x - y$ . Somit lautet die explizite Gleichung der Integralfläche

$$u(x, y) = 2y + (x - y)^2.$$

**Bemerkung 6.1** (a) Diese einfachen Beispiele könnten suggerieren, dass jedes Anfangswertproblem zu einer PDGI erster Ordnung eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Dies ist nicht der Fall. Ist das Anfangswertproblem (6.3) zusammen mit den Anfangsbedingungen (6.5) ein korrekt gestelltes Problem? Unter welchen Bedingungen existiert eine eindeutig bestimmte Integralfläche zu einer gegebenen Anfangskurve?

(b) Beachten Sie, dass selbst im Falle einer *linearen* PDGI erster Ordnung das charakteristische System nicht-linear ist. Nach der Theorie der gew. DGI kann man daher höchstens *lokal* die Existenz einer Lösung garantieren.

(c) Die Auflösung der parametrischen Darstellung der Integralfläche  $(x(s, t), y(s, t), u(s, t))$  könnte weitere Probleme mit sich bringen. Zur Erinnerung: Der Satz über die Umkehrabbildung garantiert die lokale Existenz der inversen Abbildung einer differenzierbaren Funktion, wenn an dieser Stelle die Funktionaldeterminante (Jacobian)  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)}$  ungleich 0 ist. Die explizite Berechnung der Jacobi-Matrix am Punkt  $s$  der Anfangskurve liefert

$$J = \begin{vmatrix} x_t(0, s) & x_s(0, s) \\ y_t(0, s) & y_s(0, s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'(t) & x'_0(s) \\ y'(t) & y'_0(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x'_0(s) \\ b & y'_0(s) \end{vmatrix}.$$

Folglich ist die Matrix singulär, genau dann, wenn die Tangentialvektoren  $(a, b)$  an die charakteristische Kurve und  $(x'_0(s), y'_0(s))$  an die Anfangskurve linear abhängig sind. Die geometrische Bedeutung von  $J = 0$  ist, dass die Projektion der Anfangskurve  $\Gamma(s)$  in die  $xy$ -Ebene tangential ist zur Projektion einer charakteristischen Kurve (Berührung liegt vor).

Um die Eindeutigkeit der Lösung nahe der Anfangskurve zu garantieren, muss also gelten  $J \neq 0$ . Diese Bedingung heißt *Transversalität* — die Anfangskurve muss in allen Punkten quer zu den charakteristischen Linien verlaufen.

**Beispiel 6.3 (Korrekt und nicht-korrekt gestellte Probleme)** (a) Man löse  $u_x = 1$  bezüglich der Anfangsbedingung  $u(0, y) = g(y)$ . Die charakteristischen Gleichungen und Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} x_t(t, s) &= 1, & y_t(t, s) &= 0, & u_t(t, s) &= 1, \\ x(0, s) &= 0, & y(0, s) &= s, & u(0, s) &= g(s). \end{aligned}$$

Die parametrische Form der Integralfläche ist  $(x(t, s), y(t, s), u(t, s)) = (t, s, t + g(s))$  so dass die explizite Lösung lautet  $u(x, y) = x + g(y)$ .

(b) Wir betrachten die selbe Gleichung  $u_x = 1$ , verändern aber die Anfangsbedingungen:  $u(x, 0) = h(x)$ . In diesem Fall wandelt sich das Bild drastisch.

$$\begin{array}{lll} x_t(t, s) = 1, & y_t(t, s) = 0, & u_t(t, s) = 1, \\ x(0, s) = s, & y(0, s) = 0, & u(0, s) = h(s). \end{array}$$

Die parametrische Lösung lautet

$$(x(t, s), y(t, s), u(t, s)) = (t + s, 0, t + h(s)).$$

Die Gleichungen  $x = t + s, y = 0$  können nicht nach  $s$  und  $t$  aufgelöst werden.

Geometrisch: Die Gleichungen der Charakteristiken sind  $x'(t) = 1, y'(t) = 0$ , also  $(x(t), y(t)) = (t, c)$ , was die Parallelen Geraden zur  $x$ -Achse sind;  $y = \text{const.}$ . Die Anfangskurve ist die  $x$ -Achse,  $y = 0$ , also eine spezielle Charakteristik. Auch analytisch ist klar, dass die die Transversalität auf der gesamten Anfangskurve verletzt ist, denn

$$J = \begin{vmatrix} a & x'_0(s) \\ b & y'_0(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Im Spezialfall  $h(x) = x + c$  mit einer Konstanten  $c$ , erhalten wir  $u(t, s) = t + s + c$ . In diesem Fall ist es nicht nötig, nach  $s$  und  $t$  aufzulösen, da wir die explizite Lösung ablesen können:  $u(x, y) = x + c + f(y)$  für jede differenzierbare Funktion  $f$  mit  $f(0) = 0$ . In diesem Fall haben wir also unendlich viele Lösungen und somit keine Eindeutigkeit.

(c) Für jede andere Wahl von  $h$  haben wir jedoch gar keine Lösung des Problems — die Existenzbedingung ist verletzt.

**Bemerkung 6.2** (a) Wegen der besonderen Rolle, die die Projektionen der charakteristischen Kurven spielen, bezeichnet man sie auch als *Charakteristiken*. Im Falle einer linearen PDGl erster Ordnung (6.4) lautet das System der gew. DGl der (Projektionen) der Charakteristiken:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = a(x(t), y(t)), \quad y'(t) = \frac{dy}{dt} = b(x(t), y(t)), \quad (6.10)$$

und dieses führt auf  $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$ .

(b) Die Methode der Charakteristiken ist, in etwas abgewandelter Form, für die allgemeine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in zwei Variablen anwendbar:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Sie führt auf ein gew. DGLsystem von fünf Gleichungen, für jede Variable von  $F$  eine Gleichung, siehe [PR05, 2.9, Seite 52 ff.] oder [Joh82, 1.7, S. 19 ff.].

## 6.3 Klassifikation von semilinearen PDGln zweiter Ordnung

### 6.3.1 Quadratische Formen – Wiederholung

Wir wiederholen die wichtigsten Fakten über quadratische Formen aus der linearen Algebra. **Sylvestersches Trägheitsgesetz** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix.

(a) Dann existiert eine invertierbare Matrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , sowie  $r, s, t \in \mathbb{N}_0$  mit  $r + s + t = n$  und eine Diagonalmatrix  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{r+s}, 0, \dots, 0)$  mit  $d_i > 0$  für  $i = 1, \dots, r$  und  $d_i < 0$  für  $i = r + 1, \dots, r + s$  und

$$BAB^\top = \text{diag}(d_1, \dots, d_{r+s}, 0, \dots, 0).$$

Wir nennen  $r + s$  den *Rang* von  $A$  und  $r - s$  die *Signatur* von  $A$ .

(b) Rang und Signatur hängen nicht von der Wahl von  $B$  ab, das heißt, wenn für eine andere reguläre Matrix  $B'$  und eine andere Diagonalmatrix  $D'$  gilt  $D' = B'A(B')^\top$ , so stimmen Rang und Signatur von  $D$  und  $D'$  überein.

Wir assoziieren zu  $A$  eine quadratische Form  $Q_A(h)$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ , über

$$Q_A(h) = h^\top \cdot A \cdot h = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j.$$

Wir nennen  $Q_A$  bzw.  $A$

positiv definit,	falls $\forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0: Q_A(h) > 0$ .
negativ definit,	falls $\forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0: Q_A(h) < 0$ .
positiv semidefinit,	falls $\forall h \in \mathbb{R}^n: Q_A(h) \geq 0$ .
negativ semidefinit,	falls $\forall h \in \mathbb{R}^n: Q_A(h) \leq 0$ .
indefinit,	falls $\exists h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n: Q_A(h_1) < 0 < Q_A(h_2)$ .

Zur Erinnerung,  $Q_A$  ist positiv (negativ) definit, falls alle Eigenwerte von  $A$  positiv (negativ) sind.  $Q_A$  ist semidefinit, falls einige Eigenwerte gleich Null sind, alle anderen Eigenwerte aber dasselbe Vorzeichen haben.  $Q_A$  ist indefinit, falls  $A$  sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt.

### 6.3.2 Elliptisch, Parabolisch, Hyperbolisch

Wir betrachten die semilineare Gleichung zweiter Ordnung in  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0; \quad (6.11)$$

die Koeffizienten  $a_{ij}(x)$  seien stetige Funktionen. Da wir  $u \in C^2(\Omega)$  annehmen, gilt Schwarz' Lemma und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Koeffizientenmatrix  $A(x)$  als symmetrisch annehmen:  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Definition 6.2** Wir nennen die PDGln (6.11) im Punkte  $x_0$

*elliptisch*, falls die Matrix  $A(x_0)$  positiv oder negativ definit ist,  
*parabolisch*, falls  $A(x_0)$  positiv oder negativ semidefinit ist und den Rang  $n - 1$  hat (Null ist Eigenwert von  $A(x_0)$  der Vielfachheit 1),  
*hyperbolisch*, falls  $A(x_0)$  indefinit ist mit Rang  $n$  und einer Signatur vom Betrag gleich  $n - 2$ . Das heißt, die Matrix hat  $n - 1$  positive und einen negativen Eigenwert (oder umgekehrt).

**Bemerkung 6.3** (a) Der Typ der Gleichung ändert sich nicht, wenn man (6.11) mit  $-1$  multipliziert. Aus einer positiv definiten Matrix  $A$  wird eine negativ definite Matrix  $-A$ . Die Lösung  $u$  ändert sich nicht.

(b) Der Typ einer PDGL kann durchaus von der Stelle  $x_0 \in \Omega$  abhängen und braucht nicht konstant zu sein. In diesem Fall spricht man vom *gemischten Typ*.

### 6.3.3 Koordinatentransformationen

Wir untersuchen, wie sich die Koeffizienten  $a_{ij}(x)$  verändern, wenn wir eine reguläre Variablentransformation  $y = \varphi(x)$  durchführen;

$$y_l = \varphi_l(x_1, \dots, x_n), \quad l = 1, \dots, n;$$

Die Transformation heißt *regulär*, falls die Funktionaldeterminante (Jacobische, Determinante der Jacobi-Matrix)  $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_0) \neq 0$  für alle  $x_0 \in \Omega$ .

Nach dem Satz über die Inverse Abbildung, kann man die Transformation dann lokal invertieren; die inverse Abbildung sei  $x = \psi(y)$

$$x_l = \psi_l(y_1, \dots, y_n), \quad l = 1, \dots, n.$$

Setzt man

$$\tilde{u}(y) := u(\psi(y)), \quad \text{dann} \quad u(x) = \tilde{u}(\varphi(x))$$

und fordert  $\varphi_l \in C^2(\Omega)$ , so hat man nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= \sum_{l=1}^n \tilde{u}_{y_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}, \\ u_{x_i x_j} &= (u_{x_i})_{x_j} = \sum_{k,l=1}^n \tilde{u}_{y_l y_k} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \tilde{u}_{y_l} \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Setzt man (6.12) in (6.11) ein, so erhält man

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{u}_{y_l y_k} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \tilde{u}_{y_l} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_i \partial x_j} + \tilde{F}(y, \tilde{u}, \tilde{u}_{y_1}, \dots, \tilde{u}_{y_n}) = 0. \quad (6.13)$$

Wir bezeichnen die Koeffizienten vor den zweiten partiellen Ableitungen von  $\tilde{u}$ , der transformierten Gleichung mit  $\tilde{a}_{lk}$ ,

$$\tilde{a}_{lk} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}, \quad (6.14)$$

und schreiben (6.13) in der selben Form wie (6.11)

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{lk}(y) \tilde{u}_{y_l y_k} + \tilde{F}(y, \tilde{u}, \tilde{u}_{y_1}, \dots, \tilde{u}_{y_n}) = 0.$$

Gleichung (6.14) spielt später eine entscheidende Rolle um die PDGl (6.11) zu vereinfachen. Und zwar wollen wir, dass einige der Koeffizienten  $\tilde{a}_{lk}$  zu 0 werden. Schreibt man

$$b_{lj} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}, \quad l, j = 1, \dots, n, \quad B = (b_{lj}),$$

das heißt,  $B$  ist die Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation, so lauten die neuen Koeffizienten  $\tilde{A}(y) = (\tilde{a}_{lk}(y))$  wie folgt:

$$\tilde{A} = B \cdot A \cdot B^T.$$

Dies ist aber genau die Transformationsformel für quadratische Formen. Nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz, Satz 6.3.1 haben  $A$  und  $\tilde{A}$  die selbe Signatur und den selben Rang. Wir haben also den folgenden Satz gezeigt:

**Satz 6.1** *Der Typ einer semilinearen PDGl zweiter Ordnung ändert sich bei einer regulären Koordinatentransformation nicht.*

*Notation.* Es sei  $L$  ein Differentialoperator der Form

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

dann bezeichnen wir mit  $L_2$

$$L_2[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j}$$

die Summe der Terme mit den höchsten partiellen Ableitungen.  $L_2$  ist ein linearer Operator.

**Definition 6.3** (a) Die PDGl  $L[u] = 0$  ist in *Normalform*, falls

$$L_2[u] = \sum_{j=1}^r u_{x_j x_j} - \sum_{j=r+1}^{r+s} u_{x_j x_j}$$

mit gewissen natürlichen Zahlen  $r, s$  mit  $r + s \leq n$ .

(b) Es sei  $n = 2$ . Eine hyperbolische Gleichung  $L[\tilde{u}] = 0$  ist in *kanonischer* Form, wenn nach Koordinatentransformation  $u(x, y) = \tilde{u}(\xi, \eta)$

$$L_2[\tilde{u}] = \tilde{u}_{\xi \eta}.$$

**Bemerkung 6.4** (a) Der Typ der Gleichung kann vom betrachteten Punkt  $x_0 \in \Omega$  abhängen. Zum Beispiel ist die *Trichomi-Gleichung*

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0$$

von *gemischtem Typ*. Genauer gesagt ist sie elliptisch für  $y > 0$ , parabolisch für  $y = 0$  und hyperbolisch für  $y < 0$ .

(b) Die Laplace-Gleichung ist elliptisch, die Wärmeleitungsgleichung ist parabolisch während die Wellengleichung hyperbolisch ist.

(c) Diese Klassifikation ist nicht komplett, da etwa für  $n \geq 3$  Matrizen mit genau einem positiven, genau einem negativen und genau einem Eigenwert gleich 0 nicht erfasst sind; für  $n = 2$  ist die Klassifikation vollständig.

(d) Der Fall  $n = 2$ . Die PDGl

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

mit Koeffizienten  $a = a(x, y)$ ,  $b = b(x, y)$  und  $c = c(x, y)$  ist genau dann elliptisch, parabolisch, bzw. hyperbolisch bei  $(x_0, y_0)$ , wenn  $ac - b^2 > 0$ ,  $ac - b^2 = 0$  bzw.  $ac - b^2 < 0$  bei  $(x_0, y_0)$ .

### 6.3.4 Charakteristiken

Gegeben sei die semilineare PDGl zweiter Ordnung in  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0 \quad (6.15)$$

mit stetigen Koeffizienten  $a_{ij}$ ;  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ . Analog zur Gleichung 1. Ordnung definieren wir die Charakteristiken.

**Definition 6.4** Es sei  $\sigma \in C^1(\Omega)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  fixiert. Die Hyperfläche  $\mathcal{F} = \{x \in \Omega \mid \sigma(x) = c\}$  mit  $\text{grad} \sigma(x_0) \neq 0$  für alle  $x_0 \in \mathcal{F}$  (reguläre Fläche) heißt *charakteristische Hyperfläche* oder einfach eine *Charakteristik* für die PDGl (6.11), falls für alle  $x_0 \in \mathcal{F}$  gilt:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial \sigma(x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma(x_0)}{\partial x_j} = 0. \quad (6.16)$$

Die PDGl erster Ordnung (6.16) heißt *charakteristische Gleichung* von (6.11).

Im Falle  $n = 2$  sprechen wir von *charakteristischen Linien*.

Wenn alle Hyperflächen  $\sigma(x) = c$  für  $a < c < b$  charakteristisch sind, so füllen diese Hyperflächen einen Teil des Gebietes  $\Omega$  aus; sie überschneiden sich nicht, da die Mengen  $x \in \Omega$  mit  $\sigma(x) = c_1$  und  $\sigma(x) = c_2$  keine Punkte gemeinsam haben. Insbesondere können wir (in einem gewissen Bereich von  $\Omega$ ) jedem Punkt  $x_0 \in \Omega$  *genau eine* Hyperfläche  $\sigma(x) = c_0$  zuordnen, in der  $x_0$  liegt. Diesen Wert  $c_0$  können wir als neue Koordinate von  $x \in \Omega$  einführen. Setzt man also

$$y_1 = \sigma(x),$$

so sieht man aus Gleichung  $\tilde{a}_{lk} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$ , (6.14), dass nach der Koordinatentransformation der Eintrag links oben in der Koeffizientenmatrix verschwindet,  $\tilde{a}_{11} = 0$ . Dies bedeutet, je mehr charakteristische Hyperflächen man kennt, desto mehr Koeffizienten  $\tilde{a}_{jj}$  verschwinden zu 0 und die transformierte PDGl wird einfacher.

**Beispiel 6.4** (a) Die charakteristische Gleichung von  $u_{xy} = 0$  lautet  $\sigma_x \sigma_y = 0$ , sodass  $\sigma_x = 0$  und  $\sigma_y = 0$  die charakteristischen Linien definieren. Diese sind parallel zu den Koordinatenachsen, also sind  $y = c_1$  ( $\sigma(x, y) = y - c_1 = 0$ ) und  $x = c_2$  ( $\sigma(x, y) = x - c_2 = 0$ ) die Charakteristiken.

(b) Die charakteristische Gleichung von

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0, \quad x \neq 0, y \neq 0$$

lautet  $x^2 \sigma_x^2 - y^2 \sigma_y^2 = 0$ . Wegen  $\det A = x^2(-y^2) - 0 = -x^2 y^2 < 0$  ist die Gleichung hyperbolisch. **Allgemeines Vorgehen bei  $n = 2$  Variablen.** Wir schreiben die Charakteristikengleichung für die allgemeine lineare PDGL zweiter Ordnung in 2 Variablen auf. Die charakteristische Gleichung von  $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$  ist

$$a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x \sigma_y + c\sigma_y^2 = 0 \Leftrightarrow a \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \right)^2 + \frac{\sigma_x}{\sigma_y} + c = 0.$$

Man beachte, dass der Typ bestimmt ist durch  $\det A = ac - b^2$ . Wegen  $\text{grad } \sigma \neq 0$ , ist die Gleichung  $\sigma(x, y) = c$  lokal auflösbar, etwa nach  $y$ ,  $y = y(x)$ , sodass nach dem Auflösungsatz  $y' = -\sigma_x / \sigma_y$ . Dasselbe Ergebnis erhält man durch Differentiation von  $\sigma(x, y) = \text{const.}$ . Der Differentialformenkalkül liefert  $d\sigma(x, y) = d \text{const.}$  oder  $\sigma_x dx + \sigma_y dy = 0$  bzw.  $y'(x) = dy/dx = -\sigma_x / \sigma_y$ . Setzt man dies in die Charakteristikengleichung ein, so hat man

$$a(y')^2 - 2by' + c = 0,$$

mit den Lösungen (falls  $a \neq 0$ )

$$y' = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Man erkennt, dass eine elliptische Gleichung gar keine Charakteristiken besitzt, eine parabolische Gleichung besitzt eine Schar von Charakteristiken und eine hyperbolische Gleichung hat zwei Scharen charakteristischen Linien.

*Der hyperbolische Fall.* Ist  $c_1 = \sigma_1(x, y)$  die erste Familie von Charakteristiken und  $c_2 = \sigma_2(x, y)$  die zweite Familie, so führt man die neuen Variablen

$$\xi = \sigma_1(x, y), \quad \eta = \sigma_2(x, y)$$

ein. Dann verschwinden die beiden diagonalen Koeffizienten  $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$  und die hyperbolische Gleichung liegt in *charakteristischer Form* vor

$$2\tilde{b} \tilde{u}_{\xi\eta} + F(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta) = 0.$$

*Der parabolische Fall.* Wegen  $\det A = 0$ , gibt es nur *eine* Familie von charakteristischen Linien, etwa  $c_1 = \sigma_1(x, y)$ . Nach der Koordinatentransformation

$$z = \sigma_1(x, y), \quad y = y.$$

verschwindet nicht nur der Koeffizient  $\tilde{a} = 0$ . Wegen  $\det A = \det \tilde{A} = \tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2 = 0$  verschwindet auch  $\tilde{b} = 0$ . Die transformierte parabolische Gleichung hat dann die *charakteristische Form*

$$\tilde{c} \tilde{u}_{yy} + F(z, y, \tilde{u}, \tilde{u}_z, \tilde{u}_y) = 0.$$

In unserem obigen Beispiel ist die charakteristische Gleichung

$$x^2(y')^2 - y^2 = 0, \quad y' = \pm y/x.$$

Dies führt auf

$$\frac{dy}{y} = \pm \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \pm \ln|x| + c_0.$$

Wir haben zwei Familien von charakteristischen Linien:

$$y = c_1 x, \quad y = \frac{c_2}{x}.$$

Tatsächlich führt in unserem Beispiel die Koordinatentransformation

$$\xi = \frac{y}{x} = c_1, \quad \eta = xy = c_2$$

auf

$$\begin{array}{ccccc} \eta_x = y, & \eta_y = x, & \eta_{xx} = 0, & \eta_{yy} = 0, & \eta_{xy} = 1, \\ \xi_x = -\frac{y}{x^2}, & \xi_y = \frac{1}{x}, & \xi_{xx} = 2\frac{y}{x^3}, & \xi_{yy} = 0, & \xi_{xy} = -\frac{1}{x^2}. \end{array}$$

Damit hat (6.12) die Gestalt

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \tilde{u}_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + \tilde{u}_{\eta\eta} \eta_x^2 + \tilde{u}_{\xi} \xi_{xx} + \tilde{u}_{\eta} \eta_{xx} \\ u_{yy} &= \tilde{u}_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + \tilde{u}_{\eta\eta} \eta_y^2 + \tilde{u}_{\xi} \xi_{yy} + \tilde{u}_{\eta} \eta_{yy} \end{aligned}$$

Beachtet man  $x^2 = \eta/\xi$ ,  $y^2 = \xi\eta$  und setzt diese Werte und die der partiellen Ableitungen von  $\xi$  und  $\eta$  ein, so hat man

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \tilde{u}_{\xi\xi} \frac{y^2}{x^4} - 2\frac{y^2}{x^2} \tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta} y^2 + 2\frac{y}{x^3} \tilde{u}_{\xi}, \\ u_{yy} &= \tilde{u}_{\xi\xi} \frac{1}{x^2} + 2\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta} x^2. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} &= -4y^2 \tilde{u}_{\xi\eta} + 2\frac{y}{x} \tilde{u}_{\xi} = 0 \\ \tilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2} \frac{1}{xy} \tilde{u}_{\xi} &= 0. \end{aligned}$$

Wegen  $\eta = xy$ , lautet die charakteristische Form der Gleichung

$$\tilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2\eta} \tilde{u}_{\xi} = 0.$$

*Allgemeine Lösung der Gleichung.* Substituiert man weiter  $v = \tilde{u}_{\xi}$ , so erhält man  $v_{\eta} - \frac{1}{2\eta} v = 0$  was der gew. DGI  $v' - \frac{1}{2\eta} v = 0$  entspricht. Folglich ist  $v(\eta, \xi) = c(\xi)\sqrt{\eta}$ . Integriert man bezügl.

$\xi$ , so erhält man  $\tilde{u}(\xi, \eta) = A(\xi)\sqrt{\eta} + B(\eta)$ . Die Rücktransformation zu den Ausgangsvariablen  $x$  und  $y$  liefert die allgemeine Lösung

$$u(x, y) = A\left(\frac{y}{x}\right) \sqrt{xy} + B(xy).$$

(c) Die eindimensionale Wellengleichung  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ . Die charakteristische Gleichung  $\sigma_t^2 = a^2 \sigma_x^2$  führt auf die zwei Lösungen

$$-\sigma_t / \sigma_x = dx/dt = \dot{x} = \pm a.$$

Somit sind die charakteristischen Linien  $x = at + c_1$  und  $x = -at + c_2$ . Die Koordinatentransformation  $\xi = x - at$  und  $\eta = x + at$  führt auf  $\tilde{u}_{\xi\eta} = 0$ , mit der allgemeinen Lösung  $\tilde{u}(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ . Folglich ist  $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$  die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.

(d) Die Wellengleichung in  $n$  Dimensionen hat die charakteristische Gleichung

$$\sigma_t^2 - a^2 \sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch die *charakteristischen Kegel*

$$\sigma(x, t) = a^2(t - t^{(0)})^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(0)})^2 = 0,$$

wobei der Punkt  $(x^{(0)}, t^{(0)})$  die Spitze des Kegels ist. In der Tat ist

$$\sigma_t = 2a^2(t - t^{(0)}), \quad \sigma_{x_i} = -2(x_i - x_i^{(0)})$$

und weiter  $\sigma_t^2 - a^2 \sum_{i=1}^n 4(x_i - x_i^{(0)})^2 = 0$ .

Außerdem gibt es auch charakteristische Hyperebenen,

$$\sigma(x, t) = at + \sum_{i=1}^n b_i x_i = 0,$$

wobei  $\|b\| = 1$ .

(e) Die Wärmeleitungsgleichung hat die charakteristische Gleichung  $\sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2 = 0$ , was  $\sigma_{x_i} = 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  liefert, sodass  $t = c$  die einzige Familie von charakteristischen Linien ist.

(f) Die Poisson- und Laplacegleichung haben die selbe charakteristische Gleichung, die auf  $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \dots = \sigma_{x_n} = 0$  führt. Also gibt es keine reguläre Fläche, die die Charakteristiken-gleichung erfüllt. Die Gleichungen haben keine charakteristischen Flächen.

### 6.3.5 Die schwingende Saite

In Beispiel 6.4 (c) wurde mit Hilfe der Charakteristiken  $\xi = x - at = c_1$  und  $\eta = x + at = c_2$  gezeigt, dass  $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$  die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist. Dabei heißt  $f$  *Vorwärts-* und  $g$  *Rückwärts-*welle. Die allg. Lösung ist also eine Überlagerung aus Vorwärts- und Rückwärts- welle.

**(a) Die unendliche Saite**

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP) für die unendliche Saite.  $u(x, t)$  ist die Auslenkung der Saite aus der Ruhelage am Ort  $x$  zur Zeit  $t$ . Die Anfangszeit sei  $t = 0$ .

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), \end{aligned} \tag{6.17}$$

wobei  $u_0$  und  $u_1$  gegebene Funktionen auf  $\mathbb{R}$  sind. Als *klassische Lösung* des obigen Anfangswertproblems bezeichnet man alle die Lösungen, die für  $t > 0$  zweimal stetig differenzierbar sind und für  $t \geq 0$  einmal stetig differenzierbar sind. Dies sind die minimalen Glattheitsbedingungen an  $u$ , damit die obigen drei Bedingungen im klassischen Sinne erfüllt werden können. Eine Funktion  $u$ , die stückweise stetig ist und (6.17) erfüllt heißt *verallgemeinerte Lösung*.

$u_0(x)$  steht für die Anfangsauslenkung der Saite am Ort  $x$  und  $u_1(x)$  beschreibt den Anfangsimpuls, den die Saite am Ort  $x$  erfährt (Hammerschlag auf eine Klaviersaite).

Setzt man die Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung  $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$  ein, so erhält man

$$u_0(x) = f(x) + g(x), \quad u_1(x) = -af'(x) + ag'(x).$$

Differenziert man die erste, so hat man  $u_0'(x) = f'(x) + g'(x)$ , sodass

$$f'(x) = \frac{1}{2}u_0'(x) - \frac{1}{2a}u_1(x), \quad g'(x) = \frac{1}{2}u_0'(x) + \frac{1}{2a}u_1(x).$$

Integriert man diese beiden Gleichungen von 0 bis  $x$ , so hat man

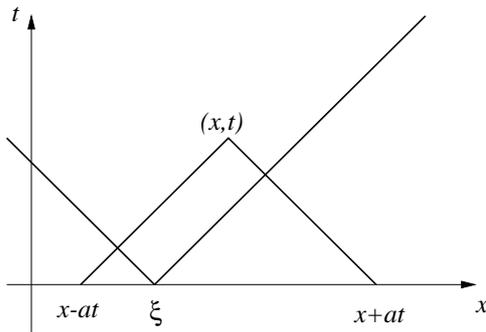
$$f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x u_1(y) dy + A, \quad g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x u_1(y) dy + B,$$

wobei  $A$  und  $B$  solche Konstanten sind, dass  $u_0(x) = f(x) + g(x)$  erfüllt ist, also dass gilt  $A + B = 0$ . Schließlich haben wir

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - at) + g(x + at) \\ &= \frac{1}{2}(u_0(x + at) + u_0(x - at)) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} u_1(y) dy + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} u_1(y) dy \end{aligned}$$

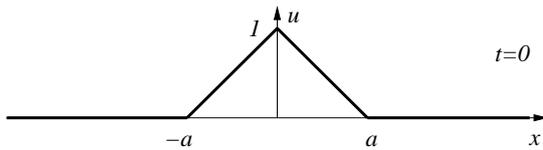
$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x + at) + u_0(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy. \tag{6.18}$$

Diese Formel ist die *d'Alembertsche Wellenformel* (1746).



Aus Gleichung (6.18) folgt unmittelbar, dass die Lösung  $u(x, t)$  eindeutig durch die Werte der Anfangsfunktionen  $u_0$  und  $u_1$  im Intervall  $[x - at, x + at]$  bestimmt ist, dessen Endpunkte durch die charakteristischen Linien durch den Punkt  $(x, t)$  herausgeschnitten werden. Dieses Intervall heißt *Abhängigkeitsbereich* für die Lösung  $u(x, t)$ , wie in der nebenstehenden Figur dargestellt.

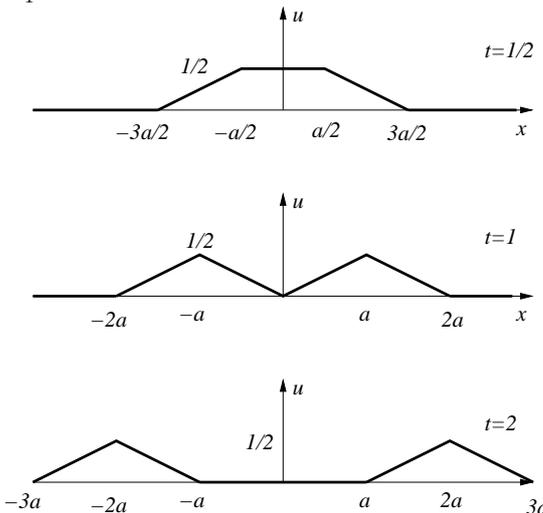
Umgekehrt *beeinflussen* die Anfangswerte am Punkt  $(\xi, 0)$  der  $x$ -Achse den Funktionswert  $u(x, t)$  in dem dreieckigen Gebiet, mit der Spitze bei  $(x, 0)$ , welches durch die Charakteristiken begrenzt wird. Das heißt,  $u(x, t)$  wird beeinflusst durch die Werte am Punkt  $(\xi, 0)$ , wenn  $\xi - at < x < \xi + at$ . Dies bedeutet, dass sich unser Signal oder unsere Störung  $u$  höchstens mit der Geschwindigkeit  $a$  ausbreitet.



**Beispiel 6.5** Wir wollen die folgende Lösung (6.18) der eindimensionalen Wellengleichung interpretieren. Angenommen,  $u_1(x) = 0$  für alle  $x$  und

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

In diesem Beispiel betrachten wir eine Saite, die zur Zeit  $t = 0$  gezupft wird, wie im nebenstehenden Bild gezeigt ist. Dies ist die Funktion  $u_0(x)$ . Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null,  $u_1 = 0$ .



In diesen Bildern ist das Verhalten der Saite dargestellt zu verschiedenen Momenten. Der Anfangspeak teilt sich in zwei halb so hohe Peaks, von denen der eine mit der Geschwindigkeit  $a$  nach rechts und der andere mit der selben Geschwindigkeit nach links läuft.

Üblicherweise setzt man voraus, dass  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$  und  $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$  sind. In diesem Falle ist die Lösung  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  und wir können die beiden zweiten Ableitungen berechnen und diese sind stetig. Andererseits ist die rechte Seite der d'Alembertschen Formel auch für beliebige stetige Funktionen  $u_1$  und beliebige Funktionen  $u_0$  sinnvoll definiert. Wenn wir diese Lösungen  $u(x, t)$  als *verallgemeinerte Lösungen* des Cauchy-Problems ansehen, dann müssen wir uns überlegen, welchen Sinn der Ausdruck  $u_{tt} - a^2 u_{xx}$  noch haben soll. Insbesondere brauchen wir einen allgemeineren Funktionsbegriff und einen allgemeineren Ableitungsbegriff. Dies ist der Inhalt des nächsten Kapitels.

Stellen, an denen die Funktion  $u(x, t)$  nicht differenzierbar ist, heißen *Singularitäten*. In unserem Fall ist die Anfangsfunktion  $u_0(x) = u(x, 0)$  an den Stellen  $-a, 0, a$  singularär. Diese Singularitäten bleiben für alle  $t$  erhalten und werden entlang der Charakteristiken transportiert, das heißt, wenn  $u$  an der Stelle  $(x_0, t_0)$  singularär ist, dann ist  $u$  auch an den Stellen  $(x_+, t_1)$  oder  $(x_-, t_1)$  singularär, wobei

$$x_+ - at = x_0 - at_0, \quad x_- + at = x_0 + at_0, \quad t_1 > 0.$$

Dieses Phänomen ist typisch für hyperbolische Gleichungen. Bei parabolischen und elliptischen Gleichungen hingegen, werden Singularitäten in den Anfangs- oder Randwerten unmittlbar geglättet.

**Beispiel 6.6** (Dieses Beispiel wurde in der Vorlesung nicht gebracht) Es sei  $u(x, t)$  die Lösung des AWP

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \chi_{[-2,2]}(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) = u_0(x).$$

- (a) Bestimmen Sie  $u(0, 1/6)$ .  
 (b) Bestimmen Sie das Verhalten von  $u$  für große Zeiten,  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ .  
 (c) Berechnen Sie  $\max u(x, t)$ .  
 (d) Bestimmen Sie alle Punkte  $(x, t)$ , wo  $u \in C^2$  ist.

*Lösung.* (a) Nach der d'Alembertschen Formel ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x+3t) + u_0(x-3t)) + \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} u_1(y) dy,$$

so dass  $u(0, 1/6) = 7/6$ .

(b) Es ist offenbar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_0(x+3t) = \lim_{t \rightarrow \infty} u_0(x-3t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{x-3t}^{x+3t} u_1(y) dy = \int_{-2}^2 dy = 4,$$

also ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{2}{3}$ .

(c) Es ist

$$\max \int_{x-3t}^{x+3t} u_1(y) dy = \int_{-2}^2 dy = 4,$$

wobei dies Maximum für alle Punkte  $(x, y)$  angenommen wird, wo  $x-3t \leq -2$  und  $x+3t \geq 2$ . Außerdem wird das Maximum 1 der integralfreien Summanden angenommen für  $x-3t \geq -2$  und  $x+3t \leq 2$ . Somit liegt das Maximum  $1 + \frac{1}{6}4 = \frac{5}{3}$  genau dann vor, wenn

$$x - 3t = -2 \quad \text{und} \quad x + 3t = 2,$$

also wenn  $(x, t) = (0, 2/3)$ .

(d) Die Anfangssingularitäten liegen bei  $x = \pm 2$ . Diese werden entlang der Charakteristiken transportiert. Die Lösung ist in  $C^2$  für alle Punkte, die nicht auf den 4 Geraden

$$x \pm 3t = -2, \quad x \pm 3t = 2$$

liegen.

**Theorem 6.2** Es sei  $T > 0$  fixiert. Ferner seien  $x \in \mathbb{R}$  und  $0 \leq t \leq T$ ,  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ . Dann ist das AWP (6.17) ein korrekt gestelltes Problem,  $u$  ist dann eine klassische Lösung.

*Beweis.* Die d'Alembertsche Formel garantiert die Existenz und Eindeutigkeit von  $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \cap [0, \infty))$ . Andererseits erhalten wir für  $u_0 \in C(\mathbb{R})$  und lokal-integrierbares  $u_1$  eine verallgemeinerte Lösung.

Wir müssen noch Stabilität zeigen. Es seien  $u$  und  $\tilde{u}$  Lösungen des AWP mit den Anfangsbedingungen  $u_0, u_1$  bzw.  $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ , wobei

$$|u_0(x) - \tilde{u}_0(x)| < \delta, \quad |u_1(x) - \tilde{u}_1(x)| < \delta$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $0 \leq t \leq T$ :

$$\begin{aligned} & |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \\ & \leq \frac{1}{2} |u_0(x + at) - \tilde{u}_0(x + at)| + \frac{1}{2} |u_0(x - at) - \tilde{u}_0(x - at)| + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |u_1(y) - \tilde{u}_1(y)| dy \\ & \leq \delta + \frac{1}{2a} 2at\delta \leq (1 + T)\delta. \end{aligned}$$

Wählt man also zu gegebenem  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta = \varepsilon/(1 + T)$ , so hat man für alle  $0 \leq t \leq T$  und alle  $x \in \mathbb{R}$

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| < \varepsilon.$$

Dies beweist die Stabilität des Problems. ■

**Bemerkung 6.5** (a) Das AWP ist nicht korrekt gestellt im Bereich  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , also für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ . (b) Auch für  $T < t < 0$  ist das AWP korrekt gestellt. Physikalisch bedeutet dies, dass Schwingungsprozesse reversibel sind.

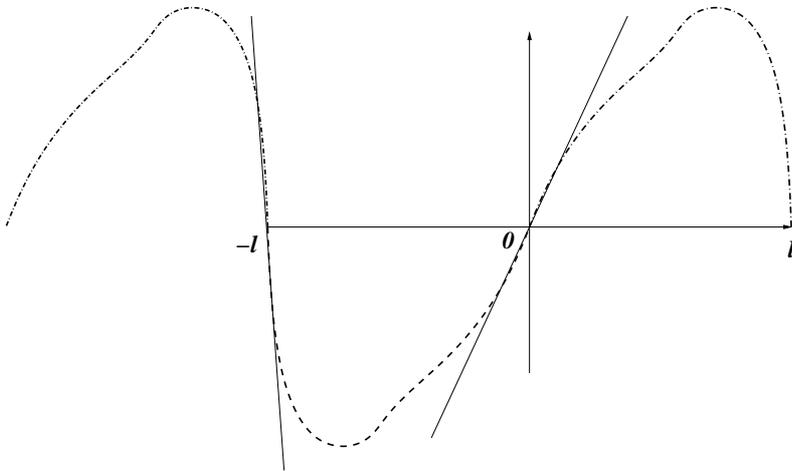
### (b) Die endliche Saite

Wir betrachten das folgende Rand-Anfangswertproblem (RAWP), bei dem sowohl Anfangswerte (Anfangsauslenkung und Anfangsimpuls) gegeben sind, wie auch Randbedingungen, die für alle  $t$  gelten.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & 0 \leq x \leq l, & \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq l \\ u_t(0, x) &= u_1(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, & t > 0. \end{aligned} \tag{6.19}$$

In diesem Fall handelt es sich um eine eingespannte Saite der Länge  $l$ . Angenommen, die gegebenen Funktionen  $u_0 \in C^2([0, l])$  und  $u_1 \in C^1([0, l])$  erfüllen die Bedingungen

$$u_0(0) = u_0(l) = 0, \quad u_1(0) = u_1(l) = 0, \quad u_0''(0) = u_0''(l) = 0. \tag{6.20}$$



Um das RAWP zu lösen definieren wir neue Funktionen  $\tilde{u}_0$  und  $\tilde{u}_1$ , die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind wie folgt: zunächst setzten wir beide Funktionen auf  $[-l, l]$  als *ungerade* Funktionen fort, also ist  $\tilde{u}_i(-x) = -\tilde{u}_i(x)$ ,  $i = 0, 1$ . Dann setzen wir  $\tilde{u}_i$  als  $2l$ -periodische Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}$  fort.

Durch die Randwerte 0, werden  $\tilde{u}_0$  und  $\tilde{u}_1$  stetig. Durch die ungerade Fortsetzung bei 0, existieren die ersten Ableitungen von  $\tilde{u}_0$  und  $\tilde{u}_1$  und sind stetig bei 0 und  $l$  und  $-l$ . Die obige Annahme  $u_0''(0) = u_0''(l) = 0$  sichert schließlich, dass  $\tilde{u}_0 \in C^2(\mathbb{R})$ . Setzt man

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x + at) + \tilde{u}_0(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(y) dy,$$

dann löst  $u(x, t)$  das RAWP.

# Kapitel 7

## Distributionen

### 7.1 Einführung — Testfunktionen und Distributionen

In diesem Abschnitt werden die Distributionen eingeführt. Distributionen nennt man auch *verallgemeinerte Funktionen*. Sie haben eine Reihe von sehr schönen Eigenschaften: Distributionen sind beliebig oft differenzierbar, man kann die partiellen Ableitungen beliebig vertauschen (Schwarz' Lemma gilt uneingeschränkt), Distributionenfolgen verhalten sich „angenehm“ gegenüber Differentiation oder Summation. Wir benutzen später die Distributionen um verallgemeinerte Anfangswertprobleme für die Wärmeleitungsgleichung und für die Wellengleichung aufzuschreiben. Hier spielt die *Fundamentallösung* eines Differentialoperators eine wichtige Rolle — erst mit Hilfe der Distributionen kann dieser Begriff sauber definiert werden.

Verallgemeinerte Funktionen traten erstmals in der Quantenmechanik auf und wurden dort von P. Dirac studiert. Er benutzte systematisch, die nach ihm benannte  $\delta$ -Funktion, die wir besser als  $\delta$ -Distribution bezeichnen. Die mathematischen Grundlagen dieser Theorie wurden unabhängig voneinander von S. L. Sobolev (1936) und L. Schwartz (1950, 1915 – 2002) gelegt.

Eine gute Einführung ist das Buch von W. Walter [Wal74] und das von O. Forster [For81, § 17]. Ausführlichere Darstellungen findet man in H. Triebel (vorhanden in deutsch und englisch) [Tri92], V. S. Wladimirow [Wla72] und in Gelfand/Schilow (drei Bände) [GS69, GS64].

#### 7.1.1 Motivation

Distributionen verallgemeinern den Funktionsbegriff Sie sind *lineare Funktionale* auf gewissen Testfunktionenräumen. Mit Hilfe von Distributionen kann man mathematisch korrekt Punktmassen und Punktladungen beschreiben sowie die Potentiale der einseitigen oder der doppelten Schicht, siehe etwa [Arn04, S. 92].

Die Grundidee ist, dass man einer hinreichend „guten“ Funktion  $f$  ein lineares Funktional  $T_f$  auf den Testfunktionen  $\mathcal{D}$  wie folgt zuordnet

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (7.1)$$

Auf der linken Seite benutzen wir die Klammerschreibweise um eine duale Paarung von linearen Räumen zu symbolisieren. Es handelt sich hierbei nicht um ein Skalarprodukt, da die linke und rechte Seite aus verschiedenen Räumen kommen.

Allgemein bezeichnet die Klammer  $T(\varphi)$  die Berechnung des linearen Funktionals  $T$  auf der Testfunktion  $\varphi$ . Wir schreiben dafür auch  $T(\varphi)$ .

Was wir von der Korrespondenz  $f \leftrightarrow T_f$  erwarten sind die folgenden Eigenschaften:

- (a) Die Zuordnung sollte *injektiv* sein, d. h.: verschiedenen Funktionalen  $T_f$  sollen auch verschiedenen Funktionen  $f$  entsprechen. Um dies zu erreichen, muss der Testfunktionsraum hinreichend groß sein.
- (b) Die Klasse der Funktionen  $f$ , denen eine Distribution  $T_f$  entspricht, sollte zumindest alle stetigen Funktionen enthalten. Wenn man jedoch an die Polynome  $f(x) = x^n$  denkt, so ergibt sich hieraus, dass die Funktion  $f(x)\varphi(x)$  auf  $\mathbb{R}$  integrierbar sein soll, also muss  $x^n\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ . Da Polynome nicht in  $L^1(\mathbb{R})$  liegen, müssen die Funktionen  $\varphi$  sehr schnell sehr klein werden für  $x \rightarrow \infty$ . Dafür gibt es grob gesagt zwei Möglichkeiten: man nimmt nur die Funktionen  $\varphi$ , die außerhalb einer gewissen von  $\varphi$  abhängigen kompakten Menge Null werden. Dies führt auf die Testfunktionen  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Dann ist  $T_f$  genau dann wohldefiniert, wenn  $f$  über jeder kompakten Teilmenge von  $\mathbb{R}$  integrierbar ist. Diese Funktionen  $f$  nennt man *lokal integrierbar* auf  $\mathbb{R}$ .

Zum anderen kann man als Testfunktionen  $\varphi$  die schnell fallende Funktionen  $\varphi(x)$  nehmen, genauer gesagt soll gelten

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n \varphi(x)| < \infty$$

für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Diese Funktionen sind die sogenannten Schwartzraumfunktionen aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

- (c) Wir wollen, dass  $T_f$  beliebig oft differenzierbar ist, selbst wenn  $f$  unstetig ist. Außerdem sollte für  $f \in C^1(\mathbb{R})$  gelten  $(T_f)' = T_{f'}$ . Dazu müssen wir dem Ausdruck

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

einen Sinn geben. Benutzt man aber die partielle Integration und dass  $\varphi(+\infty) = \varphi(-\infty) = 0$ , so ist obiger Ausdruck gleich  $-\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx$ . Das heißt, anstelle von  $f$  differenzieren wir die Testfunktion  $\varphi$ .

Daher ist das Funktional  $T_{f'}$  sinnvoll definiert so lange  $f\varphi'$  integrierbar ist. Da wir  $f$  beliebig oft differenzieren wollen, benötigen wir Testfunktionen  $\varphi$ , die beliebig oft differenzierbar sind,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

Durch die Bedingungen (b) und (c) wird der Testfunktionsraum hinreichend klein.

### 7.1.2 Der Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

#### (a) Der Träger einer Funktion und der Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

**Definition 7.1** Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexwertige Funktion. Als *Träger* von  $f$  bezeichnet man die Menge

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}} \quad (\text{Abschluss der Menge}).$$

**Bemerkung 7.1** (a) Der Träger  $\text{supp } f$  ist stets abgeschlossen; er ist die kleinste abgeschlossene Menge  $M$ , so dass für alle Punkte außerhalb  $M$  gilt  $f(x) = 0$ .

(b) In einer kleinen Umgebung jedes außerhalb des Trägers gelegenen Punktes ist die Funktion identisch Null:  $x_0 \notin \text{supp } f$  genau dann wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit  $f \equiv 0$  in  $U_\varepsilon(x_0)$ .

(c) Der Träger  $\text{supp } f$  ist genau dann kompakt, wenn er beschränkt ist.

**Beispiel 7.1** (a)  $\text{supp } \sin = \text{supp } \tan = \mathbb{R}$ .

(b) Es sei  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(1-x)$ . Dann gilt  $\text{supp } f = [-1, 1]$ .

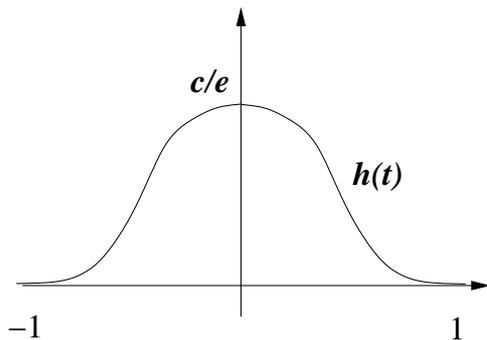
(c) Die charakteristische Funktion  $\chi_M$  hat als Träger  $\overline{M}$ , den Abschluss von  $M$ .

(d) Es sei  $g = \chi_{[0,1]}$  die charakteristische Funktion des Intervalls  $[0, 1]$  und  $f(x) = 3g(x-10) + 4g\left(\frac{x+4}{2}\right)$ . Dann ist  $\text{supp } f = [-4, -2] \cup [10, 11]$ .

**Definition 7.2** Der Raum der Testfunktionen  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  besteht aus allen  $C^\infty$ -Funktionen mit kompaktem Träger:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp } f \text{ ist kompakt}\}.$$

Die Elemente nennt man mitunter auch *finite* Testfunktionen.



Wir wollen uns überlegen, ob es überhaupt von Null verschiedene Testfunktionen gibt. Dazu betrachten wir die sogenannte *Hutfunktion*

$$h(t) = \begin{cases} c e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Die Konstante  $c$  ist dabei so gewählt, dass  $\int_{\mathbb{R}} h(t) dt = 1$ . Die Funktion  $h$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ .

Aus Übungsaufgabe 7.3 folgt, dass  $h$  sogar beliebig oft differenzierbar ist mit  $h^{(k)}(-1) = h^{(k)}(1) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Natürlich ist  $\text{supp } h = [-1, 1]$ . Folglich ist  $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  eine Testfunktion. Hieraus folgt, dass die im  $\mathbb{R}^n$  gegebene Funktion

$$h(x) = \begin{cases} c_n e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \|x\| < 1, \\ 0, & \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

zu  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gehört, wobei ihr Träger die abgeschlossenen Einheitskugel ist. Die Konstante  $c_n$

ist so gewählt, dass  $\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx = \int_{U_1(0)} h(x) dx = 1$ .

Es sei  $\varepsilon > 0$ . Wir setzen

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Dann gilt  $\text{supp } h_\varepsilon = \overline{U_\varepsilon(0)}$  und

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{U_\varepsilon(0)} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{U_1(0)} h(y) dy = 1.$$

Bisher haben wir nur eine einzige Testfunktion aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  konstruiert, nämlich  $h(x)$  und natürlich die Skalierungen  $h_\varepsilon$ . Mit ihrer Hilfe können wir

- (a) den Träger einer beliebigen integrierbaren Funktion auf ein gegebenes abgeschlossenes Intervall  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  beschränken, indem wir  $f$  durch  $f h_\varepsilon(x - a)$  ersetzen, welche den Träger in  $U_\varepsilon(a)$  hat.
- (b)  $f$  glätten.

### (b) Glättung

Durch Glättung können wir uns einen sehr reichhaltigen Vorrat an Funktionen verschaffen, die den Testfunktionenraum  $\mathcal{D}$  für unsere Bedürfnisse groß genug machen. Insbesondere können wir jede integrierbare Funktion in der  $L^p$ -Norm durch glatte ( $C^\infty$ ) Funktionen approximieren.

Wir benutzen die Funktion  $h_\varepsilon$ , für eine von S. L. Sobolev eingeführte Glättungsmethode.

**Definition 7.3** (a) Es seien  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Wir definieren das *Faltungsprodukt*, oder einfach die *Faltung*,  $f * g$  durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy = (g * f)(x).$$

Man kann zeigen, dass  $f * g(x)$  fast überall  $x \in \mathbb{R}^n$  definiert ist und es gilt  $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$ .

(b) Wir definieren die *Glättung*  $f_\varepsilon$  von  $f$  durch

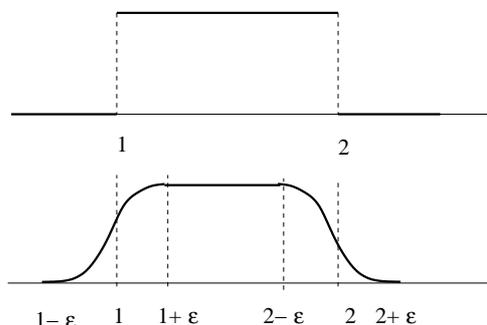
$$f_\varepsilon = f * h_\varepsilon.$$

Man beachte, dass

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h_\varepsilon(x - y)f(y) dy = \int_{U_\varepsilon(x)} h_\varepsilon(x - y)f(y) dy. \quad (7.2)$$

Grob gesagt ist  $f_\varepsilon(x)$  ein gewichteter Mittelwert von  $f$  in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$ . Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt nämlich für eine in  $U_\varepsilon(x_0)$  stetige Funktion  $f$

$$f_\varepsilon(x_0) = \int_{U_\varepsilon(x_0)} f(y)h_\varepsilon(x_0 - y) dy = f(\xi) \int_{U_\varepsilon(x_0)} h_\varepsilon(x_0 - y) dy = f(\xi) \int_{U_\varepsilon(0)} h_\varepsilon(y) dy = f(\xi).$$



Sei etwa  $f = \chi_{[1,2]}$ . Die Glättung  $f_\varepsilon$  sieht dann folgendermaßen aus

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 - \varepsilon, \\ *, & 1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon, \\ 1, & 1 + \varepsilon < x < 2 - \varepsilon, \\ *, & 2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon, \\ 0, & 2 + \varepsilon < x, \end{cases}$$

wobei der \* eine glatte Funktion zwischen 0 und 1 bedeutet.

**Lemma 7.1** Wenn  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so  $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

*Beweis.* Wir betrachten nur den Fall  $n = 1$ ,  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Wir wenden IV.3.2. Satz auf die Funktion  $F(y, t) = f(y)h_\varepsilon(t - y)$  an. Da  $h_\varepsilon$  stetig und beschränkt ist, ist  $F(y, t)$  für alle  $t$  integrierbar. Für alle fixierten  $y$  ist  $F(y, t)$  nach  $t$  differenzierbar und  $|F_t(y, t)| \leq |f(y)| |h'_\varepsilon(t - y)|$  ist ebenfalls integrierbar. Somit ist  $G(t) = \int_{\mathbb{R}} F(y, t) dy$  differenzierbar und

$$G'(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} F(y, t) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} F(y, t) dy.$$

In unserem Falle ist also  $f'_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)h'_\varepsilon(x - y) dy$ . Die Existenz der höheren Ableitungen  $f_\varepsilon^{(k)}(x)$  folgt analog. ■

**Bemerkung 7.2** (a) Es gilt  $f_\varepsilon \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(b)  $C_0(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$  liegt dicht in  $L^1$  bezüglich der  $L^1$ -Norm. Das heißt, für alle  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Funktion  $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger  $\text{supp } g$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} |f - g| dx < \varepsilon$ .

(Beweisidee). (1) Jede  $L^1$ -Funktion kann durch  $L^1$ -Funktionen mit kompaktem Träger approximiert werden.

(2) Jede integrable Funktion mit kompaktem Träger kann durch Treppenfunktionen mit kompaktem Träger approximiert werden.

(3) Jede Treppenfunktion mit kompaktem Träger kann approximiert werden durch Treppenfunktionen zu endlich vielen Rechtecken.

(4) Jede charakteristische Funktion von einem Rechteck  $\chi_Q$ , wobei  $Q$  ein abgeschlossenes Rechteck ist, kann durch eine solche Folge von Funktionen mit kompaktem Träger approximiert werden:

$$f_n(x) = \max\{0, n d(x, Q)\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei  $d(x, Q)$  den Abstand des Punktes  $x$  vom Rechteck  $Q$  bedeutet. Man beachte, dass  $f_n$  gleich 1 ist innerhalb von  $Q$  und 0 außerhalb von  $U_{1/n}(Q)$ . Diese Funktion ist stetig.

(c)  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$  ist dicht.

**(c) Konvergenz im Raum  $\mathcal{D}$** 

Notationen. Für  $x \in \mathbb{R}^n$  und einen Multi-Index  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , sei

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \\ \alpha! &= \alpha_1! \cdots \alpha_n! \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\ D^\alpha u(x) &= \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}. \end{aligned}$$

So ist zum Beispiel für  $\alpha = (2, 0, 2)$  und  $u \in C^4(\mathbb{R}^3)$ ,  $|\alpha| = 4$  die Ordnung der partiellen Ableitung und  $D^\alpha u(x) = u_{x_1 x_1 x_3 x_3}(x)$ .

Es ist klar, dass  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ein linearer Raum ist. Wir wollen einen Konvergenzbegriff in  $\mathcal{D}$  einführen, der nicht auf eine Norm oder Metrik zurückzuführen ist.

**Definition 7.4** Eine Folge  $(\varphi_k(x))$  von Testfunktionen aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  konvergiert gegen eine Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , falls es

- (a) eine kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  derart gibt, dass  $\text{supp } \varphi_k \subseteq K$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und
- (b)  $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ , gleichmäßig auf  $K$  für alle Multiindizes  $\alpha$ .

Wir bezeichnen diese Art der Konvergenz durch  $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi$ .

Für eine stetige Familie  $\{\varphi_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R}\}$  schreiben wir  $\varphi_\varepsilon \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi$ , für  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , falls für alle Folgen  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt  $\varphi_{\varepsilon_k} \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi$  für  $k \rightarrow \infty$  im Raum  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**Beispiel 7.2** Es sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $\varphi \neq 0$  eine fixierte Testfunktion; wir betrachten eine Folge  $(\varphi_k(x))$  von Testfunktionen, die wie folgt definiert sind:

(a)  $\varphi_k(x) = \left( \frac{\varphi(x)}{k} \right)$ . Diese Folge konvergiert punktweise und gleichmäßig und auch in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  gegen Null. Es ist  $\text{supp } \varphi_k = \text{supp } \varphi$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Es konvergieren alle Ableitungen gleichmäßig gegen 0. Folglich ist  $\varphi_k \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0$ .

(b)  $\varphi_k(x) = \frac{\varphi(x/k)}{k}$ . Diese Folge konvergiert nicht gegen 0 in  $\mathcal{D}$ , da für den Träger der Funktion  $\varphi_k$  gilt  $\text{supp}(\varphi_k) = k \text{supp}(\varphi)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , diese sind in keiner gemeinsamen kompakten Menge enthalten.

(c)  $\varphi_k(x) = \frac{\varphi(kx)}{k}$ . Diese Folge konvergiert gleichmäßig gegen 0 auf  $\mathbb{R}$ , da  $\frac{|\varphi(kx)|}{k} \leq C/k$  mit  $C = \sup |\varphi(y)|$ . Ist jedoch  $0 \in \text{supp } \varphi$  und  $\varphi''(0) \neq 0$ , so konvergieren die zweiten Ableitungen  $\varphi'_k(x) = \varphi'(kx)$ ,  $\varphi''_k(x) = k \varphi''(kx)$  nicht einmal punktweise bei  $x_0 = 0$ . Also gilt  $\varphi_k \not\xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0$ .

Man beachte, dass es keine Metrik in  $\mathcal{D}$  gibt, für die obige Art der Folgenkonvergenz mit der Konvergenz im metrischen Raum übereinstimmt.

## 7.2 Die Distributionen $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

**Definition 7.5** Eine *Distribution* (oder verallgemeinerte Funktion) ist ein stetiges lineares Funktional auf dem Testfunktionenraum  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Dabei heißt das lineare Funktional  $T$  *stetig* auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , falls für alle Folgen  $(\varphi_k)$ ,  $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , die in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gegen eine Funktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  konvergieren,  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ , gilt  $T(\varphi_k) \rightarrow T(\varphi)$  in  $\mathbb{C}$ .

Die Menge der Distributionen auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  oder kurz mit  $\mathcal{D}'$ .

Die Auswertung einer Distribution auf  $T \in \mathcal{D}'$  auf einer Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}$  bezeichnen wir mit  $T(\varphi)$  oder mit  $\langle T, \varphi \rangle$ . Zwei Distributionen  $T_1$  und  $T_2$  sind genau dann gleich, wenn  $T_1(\varphi) = T_2(\varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

**Bemerkung 7.3 (Charakterisierung der Stetigkeit)** (a) Ein lineares Funktional  $T$  auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ist stetig, genau dann, wenn aus  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  folgt, dass  $T(\varphi_k) \rightarrow 0$  in  $\mathbb{C}$ . Das heißt, die Stetigkeit in 0 genügt bereits für die globale Stetigkeit. Es ist klar, dass die Stetigkeit, die Stetigkeit in 0 impliziert. Sei nun  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ . Dann ist  $(\varphi_k - \varphi) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  und somit  $T(\varphi_k - \varphi) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Wegen der Linearität von  $T$  folgt hieraus  $T(\varphi_k) \rightarrow T(\varphi)$  und  $T$  ist stetig.

(b) Ein lineares Funktional  $T$  auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ist genau dann stetig, wenn

$$\forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt } \exists C > 0 \exists l \in \mathbb{N}_0 \forall \varphi \in \mathcal{D} : \left| T(\varphi) \right| \leq C \cdot \sup_{x \in K, |\alpha| \leq l} \left| D^\alpha \varphi(x) \right|. \quad (7.3)$$

Wir beweisen, dass dieses Kriterium (7.3) tatsächlich die Stetigkeit von  $T$  zur Folge hat. Sei dazu  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dann existiert eine gemeinsame kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\text{supp } \varphi_k \subseteq K$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Nach dem Kriterium gibt es eine Konstante  $C > 0$  und ein  $l \in \mathbb{Z}_+$  mit  $\left| T(\varphi_k) \right| \leq C \sup \left| D^\alpha \varphi_k(x) \right|$ , wobei das Supremum über alle  $x \in K$  und über alle Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq l$  genommen wird. Da  $D^\alpha \varphi_k \rightarrow 0$  gleichmäßig auf  $K$  für alle  $\alpha$ , erhalten wir insbesondere  $\sup \left| D^\alpha \varphi_k(x) \right| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dies beweist  $T(\varphi_k) \rightarrow 0$  und somit ist  $T$  stetig.

Der Beweis der anderen Richtung ist etwa in [Tri92, Satz 4.4, S. 55]. Wenn es eine konstante, von  $K$  unabhängige kleinste derartige Zahl  $l \in \mathbb{N}$  gibt, so nennt man  $l$  die *Ordnung* der Distribution  $T$ .

(c)  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ist ein linearer Raum.

### 7.2.1 Reguläre Distributionen

Eine große Klasse von Distributionen aus  $\mathcal{D}'$  werden durch gewöhnliche Funktionen  $f$  über die Korrespondenz  $f \leftrightarrow T_f$  gegeben, die definiert ist durch  $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx$ . Dabei suchen wir eine möglichst viele Funktionen  $f$ , für die die rechte Seite noch erklärt ist.

**Definition 7.6** Eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *lokal-integrierbar*, falls  $f$  über jeder kompakten Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  integrierbar ist. Die Menge der lokal-integrierbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$  oder kurz  $L_{\text{loc}}^1$ .

$$L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist messbar und } \forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt} : \int_K |f| dx < \infty\}.$$

**Beispiel 7.3** (a)  $C(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$

(b)  $L^1(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ .

(c)  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist nicht lokal-integrierbar  $f \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , da  $\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$  –  $f$  ist über der kompakten Menge  $[0, 1]$  nicht integrierbar.

**Bemerkung 7.4** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a)  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ .

(b) Für jedes  $R > 0$  gilt  $f \in L^1(U_R(0))$ .

(c) Für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $f \in L^1(U_\varepsilon(x_0))$ .

**Lemma 7.2 (Definition)** Es sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  lokal-integrierbar. Dann ist  $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  eine Distribution.

Wenn es zur Distribution  $T$  eine lokal-integrierbare Funktion  $g \in L^1_{\text{loc}}$  gibt mit  $T = T_g$ , so heißt  $T$  regulär. Andernfalls heißt  $T$  singular.

*Beweis.* Zunächst ist  $T_f$  ein lineares Funktional auf  $\mathcal{D}$ , denn der Multiplikationsoperator  $\varphi \mapsto f\varphi$  ist linear und die Integration ein lineares Funktional.

Wir zeigen die Stetigkeit mittels (7.3): Sei dazu  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt. Wir setzen  $C = \int_K |f| dx$  und  $l = 0$ . Dann gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \varphi \subset K$ :

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \right| \leq \int_K |f(x)| |\varphi(x)| dx \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)| dx = C \sup_{x \in K} |\varphi(x)|,$$

wobei  $C = \int_K |f| dx < \infty$  existiert, da  $f \in L^1_{\text{loc}}$ . Damit ist die Bedingung (7.3) mit  $l = 0$  erfüllt –  $T_f$  ist stetig und damit  $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . ■

**Beispiel 7.4** Es sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Dann ist

(a)  $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$  regulär mit  $f(x) = 1$ ,  $T = T_f$ .

(b)  $T(\varphi) = \int_{-1}^2 \varphi(x) dx$  ist regulär mit  $f(x) = \chi_{[-1,2]}$  und  $T = T_f$ .

(c)  $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) dx = 1 \cdot \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} 1' \cdot \varphi(x) dx = 0$ . Also ist  $T = 0$  regulär mit  $f = 0$ .

(d)  $T(\varphi) = \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(0)$  ist nicht regulär, wie wir unten sehen werden.

**Lemma 7.3 (Du Bois–Reymond/ Fundamentallemma der Variationsrechnung)** Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Es sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  und  $T_f(\varphi) = 0$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \varphi \subset \Omega$ .

Dann ist  $f = 0$  fast überall in  $\Omega$ .

*Beweis.* Wir betrachten der Einfachheit halber nur  $n = 1$  und  $\Omega = (-\pi, \pi)$ . Sei  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < \pi$  fixiert. Ferner sei  $\varphi_k(x) = e^{-ikx} h_\varepsilon(x)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt  $\text{supp } \varphi_k \subset [-\pi, \pi]$ . Da sowohl  $e^x$  als auch  $h_\varepsilon(x)$  zu  $C^\infty(\mathbb{R})$  gehören, gilt  $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  und

$$c_k = T_f(\varphi_k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} h_\varepsilon(x) dx = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Das heißt, alle Fourierkoeffizienten von  $f h_\varepsilon \in L^2[-\pi, \pi]$  verschwinden. Wegen der Parsevalschen Gleichung folgt hieraus  $f h_\varepsilon = 0$  in  $L^2(-\pi, \pi)$ . Daraus folgt, dass  $f h_\varepsilon = 0$  f. ü. in  $(-\pi, \pi)$ . Da  $h_\varepsilon > 0$  auf  $(-\pi, \pi)$  folgt  $f = 0$  f. ü. auf  $(-\pi, \pi)$ . ■

**Bemerkung 7.5** Das obige Lemma zeigt, dass die Zuordnung  $f \mapsto T_f$  injektiv ist. In der Tat, seien  $f_1$  und  $f_2$  lokal integrierbar und  $T_{f_1} = T_{f_2}$ . Dann folgt  $f_1 = f_2$  f. ü.; also ist die Abbildung injektiv. Daher können wir über diese Abbildung  $f \mapsto T_f$  die lokal-integrierbaren Funktionen einbetten in den Raum der Distributionen.

## 7.2.2 Andere Beispiele für Distributionen

**Lemma 7.4 (Definition)** Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und fixiertes  $a \in \mathbb{R}^n$  definieren wir die  $\delta$ -Distribution  $\delta_a$  über

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a).$$

Dann gilt  $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\delta_a$  ist singulär.

*Beweis.* Die Linearität von  $\delta_a$  ist unmittelbar klar. Wir müssen die Stetigkeit zeigen. Dazu sei  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ ; insbesondere gilt punktweise  $\varphi_k(x) \rightarrow 0$  für alle  $x$ . Also gilt insbesondere  $\delta_a(\varphi_k) = \varphi_k(a) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Somit ist  $\delta_a$  stetig und damit  $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Wir benutzen mitunter auch die Bezeichnung  $\delta(x - a)$  für  $\delta_a$  und  $\delta$  für  $\delta_0$  bzw.  $\delta(x)$ .

Der Einfachheit halber sei  $a = 0$ . Wir zeigen indirekt, dass  $\delta$  singulär ist. Angenommen, es gibt eine Funktion  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  gibt, so dass  $\delta = T_f$ . Dann gilt  $\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx$ .

**1. Beweis.** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, die die 0 nicht enthält. Angenommen,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \varphi \subset \Omega$ . Insbesondere ist wegen  $0 \notin \text{supp } \varphi$ ,  $\varphi(0) = 0$ . Das bedeutet, dass  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0$ . Nach dem Fundamentallema der Variationsrechnung ist dann  $f = 0$  f. ü. in  $\Omega$ . Da  $\Omega$  eine beliebige offene Menge war, die den Ursprung nicht enthält, gilt  $f = 0$  f. ü. in  $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$  und damit  $f = 0$  f. ü. in  $\mathbb{R}^n$ . Das bedeutet aber, dass  $T_f = 0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Es ist aber  $\delta \neq 0$  — ein Widerspruch.

**2. Beweis.** Wegen  $f \in L^1_{\text{loc}}$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$d := \int_{U_\varepsilon(0)} |f(x)| dx < 1.$$

Setzt man  $\varphi(x) = h(x/\varepsilon)$  mit der Hutfunktion  $h$ , so gilt  $\text{supp } \varphi = \overline{U_\varepsilon(0)}$  und  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| = \varphi(0) > 0$ , sodass

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \right| \leq \sup |\varphi(x)| \int_{U_\varepsilon(0)} |f(x)| dx = \varphi(0)d < \varphi(0).$$

Dies widerspricht aber  $\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \right| = |\varphi(0)| = \varphi(0)$ . ■

Analog kann man zeigen, dass

$$T(\varphi) = D^\alpha \varphi(a), \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

eine singuläre Distribution aus  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  definiert.

Die Distribution

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx, \quad f \in L^1_{\text{loc}},$$

kann regulär oder singulär sein, was von Eigenschaften von  $f$  abhängt.

Da durch  $T_f$ ,  $f \in L^1_{\text{loc}}$  bzw.  $\delta_a$  Masseverteilungen oder Ladungsverteilungen definiert werden können, nannte L. Schwartz diese Objekte Distributionen (Verteilungen).

### 7.2.3 Konvergenz in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

**Definition 7.7** Eine Folge  $(T_k)$ ,  $T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , konvergiert gegen  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , falls für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(\varphi) = T(\varphi).$$

Wir schreiben in diesem Fall  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T$ . Analog heißt die stetige Familie  $T_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , von Distributionen aus  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  konvergent gegen  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = T$ , falls für alle Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon(\varphi) = T(\varphi)$ .

Mit diesem Konvergenzbegriff ist  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ein vollständiger Raum, siehe auch [Wal02, p. 39]. Mit Hilfe dieses Konvergenzbegriffs gibt es viele Möglichkeiten, die singuläre Distribution  $\delta$  durch eine Folge regulärer Distributionen zu approximieren.

**Beispiel 7.5** Es sei  $f = \frac{1}{2} \chi_{[-1,1]}$  und  $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  die Skalierung von  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Es gilt also,  $f_\varepsilon = 1/(2\varepsilon) \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}$ . Wir zeigen, dass  $T_{f_\varepsilon} \rightarrow \delta$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

*Beweis.* Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$T_{f_\varepsilon}(\varphi) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]} \varphi dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon \varphi(\xi_\varepsilon) = \varphi(\xi_\varepsilon),$$

wobei  $\xi_\varepsilon \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  eine geeignete Zahl dieses Intervalls ist. Da  $\varphi$  stetig bei 0 ist, konvergiert  $\varphi(\xi_\varepsilon)$  gegen  $\varphi(0)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , denn  $\xi_\varepsilon$  geht gegen 0 für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Also ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{f_\varepsilon}(\varphi) = \varphi(0) = \delta(\varphi).$$

Das zeigt die Konvergenz gegen  $\delta$ . ■

Das folgende Lemma verallgemeinert dieses Beispiel.

**Lemma 7.5** Es sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ . Für  $\varepsilon > 0$  definieren wir die skalierte Funktion  $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ .

Dann gilt  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} T_{f_\varepsilon} = \delta$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

*Beweis.* Nach Variablentransformation  $y = x/\varepsilon$  erhalten wir  $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dx = 1$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Zum Beweis der Aussage müssen wir für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$  zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \longrightarrow \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(0) dx \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0;$$

oder, äquivalent dazu,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \rightarrow 0, \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Mit obiger Variablentransformation,  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ ,  $dx = \varepsilon dy$  geht das obige Integral über in

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} f(y) (\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)) \varepsilon dy \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) (\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)) dy \right|.$$

Da  $\varphi$  bei 0 stetig ist, ist für alle fixierten  $y$ , die Familie von Funktionen  $(\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0))$  konvergent gegen 0 für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Daher geht auch die Familie von Funktionen,  $g_\varepsilon(y) = f(y)(\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0))$  punktweise gegen 0. Mehr noch,  $g_\varepsilon$  hat eine integrable Majorante  $2C|f|$ , wobei  $C = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$ . Nach Lebesgues Theorem über die majorisierte Konvergenz (IV.2.10. Satz) sind Limes und Integral vertauschbar, daher ist auch der Limes der Integrale für  $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$  gleich Null.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| |\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)| dy = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)| dy = 0.$$

■

Die folgenden lokal integrierbaren Funktionenfamilien approximieren  $\delta$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\pi \varepsilon x^2} \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}, & f_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, & (7.4) \\ f_\varepsilon(x) &= \frac{1}{2\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon^2}}, & h_\varepsilon(x) & \\ f_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Alle Familien sind die Skalierungen von  $f(x) = f_1(x)$ . Die ersten vier Familien erfüllen die Bedingung des Lemmas  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ , die letzte jedoch nicht, da  $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$  nicht in  $L^1(\mathbb{R})$  liegt. Das Lemma gilt aber auch für uneigentliche Riemann-Integrale mit  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ .

### 7.2.4 Die Distribution $\mathcal{D}' \frac{1}{x}$

Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist nicht lokal integrierbar, da  $\int_{[0,1]} \frac{dx}{x} = +\infty$ . Daher existiert  $T_f$  als reguläre Distribution nicht. Jedoch können wir einen Ersatz für  $T_f$  definieren, der außerhalb der Null mit  $\int_K \frac{\varphi(x)}{x} dx$  übereinstimmt,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp } \varphi \subseteq K$ ,  $0 \notin K$ .

Zur Erinnerung: Der *Cauchysche Hauptwert* eines uneigentlichen Riemann-Integrals mit einer Polstelle des Integranden ist definiert wie folgt:

Die Funktion  $f: [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  habe eine Singularität bei  $c \in [a, b]$ . Dann ist

$$\text{Vp} \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b \right) f(x) dx.$$

Man beachte, dass das uneigentliche Riemann-Integral  $\int_a^b f(x) dx$  definiert ist als Summe zweier unabhängiger Limiten:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{c+\eta}^b f(x) dx$ . Beim Cauchyschen Hauptwert werden beide Grenzwerte gekoppelt. So gilt z.B.  $\text{Vp} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2n+1}} = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wogegen das uneigentliche Riemann-Integral  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  nicht definiert ist (und ebenso das Lebesgue-Integral).

**Lemma 7.6 (Definition)** Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp } \varphi \subseteq [-R, R]$ , setzen wir

$$F(\varphi) = \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Dann ist  $F$  wohldefiniert, linear und stetig auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Wir bezeichnen diese Distribution mit  $\mathcal{D}' \frac{1}{x}$ .

*Beweis.* Es sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \varphi \subseteq [-R, R]$ . Wir definieren eine Hilfsfunktion  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  über

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}, & x \neq 0 \\ \varphi'(0), & x = 0. \end{cases}$$

Da  $\varphi$  bei 0 differenzierbar ist, gilt  $\psi \in C(\mathbb{R})$ . Da  $\frac{1}{x}$  eine ungerade Funktion ist, ist  $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} = 0$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \psi(x) dx = \int_{-R}^R \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Da  $\psi$  stetig ist, existiert das obige Integral.

Wir zeigen die Stetigkeit von  $F$ . Nach dem Taylorschen Lehrsatz ist,  $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\xi_x)$  für einen geeigneten Wert  $\xi_x$  zwischen  $x$  und 0. Also ist

$$\begin{aligned} |F(\varphi)| &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| \\ &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{\varphi(0) + x\varphi'(\xi_x)}{x} dx \right| \\ &\leq \int_{-R}^R |\varphi'(\xi_x)| dx \leq 2R \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)|. \end{aligned}$$

Somit ist die Bedingung (7.3) aus Bemerkung 7.3 erfüllt. mit  $C = 2R$  und  $l = 1$ , so dass  $F$  ein stetiges lineares Funktional auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  ist und somit eine Distribution der Ordnung 1,  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . ■

In der Quantenmechanik sind die sogenannten *Sochotzskyschen* Formeln von Interesse, siehe auch [Wla72, S. 76]. Eine Anwendung findet man etwa in der Quantenchromodynamik,

[http://deposit.ddb.de/cgi-bin/dokserv?idn=959860754&dok\\_var=d1&dok\\_ext=pdf&filename=](http://deposit.ddb.de/cgi-bin/dokserv?idn=959860754&dok_var=d1&dok_ext=pdf&filename=)

In  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} T \frac{1}{x + \varepsilon i} = -\pi i \delta + \mathcal{P} \frac{1}{x},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} T \frac{1}{x - \varepsilon i} = \pi i \delta + \mathcal{P} \frac{1}{x}.$$

Beweisidee: Man zeige, dass für die Summe und die Differenz der beiden obigen Formeln gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} T \frac{2x}{x^2 + \varepsilon^2} = 2\mathcal{P} \frac{1}{x}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} T \frac{-2i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = -2\pi i \delta.$$

Der zweite Grenzwert folgt sofort aus (7.4). Wir zeigen die erste Formel.

*Beweis.* Zu zeigen ist, dass  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} - \mathcal{P} \frac{1}{x} = 0$ , also dass für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  gilt

$$\text{Vp} \int_{-R}^R \left( \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} - \frac{\varphi(x)}{x} \right) dx \rightarrow 0, \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Vp} \int_{-R}^R \frac{-\varepsilon^2 \varphi(x)}{x(x^2 + \varepsilon^2)} dx = 0.$$

Mittels Taylorentwicklung  $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\xi_x)$  und der Tatsache, dass  $\varphi(0)/(x(x^2 + \varepsilon^2))$  eine ungerade Funktion ist, so dass  $\text{Vp} \int_{\mathbb{R}} \varphi(0)/(x(x^2 + \varepsilon^2)) dx = 0$ , folgt

$$\varepsilon^2 \text{Vp} \int_{-R}^R \left| \frac{\varphi(0) + x\varphi'(\xi_x)}{x(x^2 + \varepsilon^2)} \right| dx = \varepsilon^2 \text{Vp} \int_{-R}^R \frac{|\varphi'(\xi_x)|}{x^2 + \varepsilon^2} dx \leq \varepsilon^2 \sup |\varphi'| \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} = C\varepsilon^2 \frac{\pi}{\varepsilon} = C\pi\varepsilon.$$

Dieser Term geht für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen 0. ■

### 7.2.5 Rechnen mit Distributionen

Distributionen zeichnen sich dadurch aus, dass man mit ihnen mitunter einfacher rechnen kann als mit Funktionen. Wir wollen daher die üblichen Operationen mit Funktionen, wie Addition, Multiplikation, Differentiation, Tensorprodukt, Faltung, Fouriertransformation usw. von Funktionen auf Distributionen übertragen. Unser *Allgemeines Prinzip* ist dabei immer dasselbe: Für reguläre Distributionen sollen die für Funktionen bekannten Begriffe herauskommen. Es soll also gelten (unter den notwendigen Voraussetzungen an  $f$  und  $g$ ):

$$(T_f)' = T_{f'}, \quad \mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}f}, \quad T_f * T_g = T_{f*g}, \dots$$

Wir wissen bereits, dass man Distributionen aus  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  addieren und skalar vervielfachen kann, denn  $\mathcal{D}'$  ist ein linearer Raum.

**(a) Multiplikation**

Es gibt leider keine Multiplikation  $T_1 T_2$  zweier Distributionen untereinander. Jedoch können wir ein Produkt  $a \cdot T = T \cdot a$ ,  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  für  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  definieren. Was geschieht nämlich im Falle einer regulären Distribution  $T = T_f$ , wenn man  $a T_f = T_{af}$  fordert?

$$T_{af}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x)f(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)a(x)\varphi(x) dx = T_f(a\varphi). \quad (7.5)$$

Es gilt, dass  $a\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  liegt, denn  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi$  hat kompakten Träger. Somit hat auch  $a\varphi$  kompakten Träger. Also definiert die rechte Seite von (7.5) ein lineares Funktional auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definition 7.8** Für  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  definieren wir  $aT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  durch

$$aT(\varphi) = T(a\varphi)$$

und nennen  $aT$  das *Produkt* von  $a$  und  $T$ .

Wir müssen noch die Stetigkeit zeigen. Angenommen,  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ , dann gilt  $a\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dann gilt wegen der Stetigkeit von  $T$   $\lim_{k \rightarrow \infty} T(a\varphi_k) = 0$ ; also ist  $aT$  stetig.

**Beispiel 7.6** (a)  $x \mathcal{D} \frac{1}{x} = T_1$ . Tatsächlich gilt für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$x \mathcal{D} \frac{1}{x}(\varphi) = \mathcal{D} \frac{1}{x}(x\varphi(x)) = \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = T_1(\varphi).$$

(b) Wenn  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , dann

$$f(x)\delta_a(\varphi) = \delta_a(f(x)\varphi(x)) = f(a)\varphi(a) = f(a)\delta_a(\varphi).$$

Also gilt  $f(x)\delta_a = f(a)\delta_a$ .

(c) Man beachte, dass diese Multiplikation nicht assoziativ ist, denn es gilt

$$(\delta \cdot x) \mathcal{D} \frac{1}{x} \stackrel{(b)}{=} 0 \cdot \mathcal{D} \frac{1}{x} = 0, \quad \delta \left( x \cdot \mathcal{D} \frac{1}{x} \right) \stackrel{(a)}{=} \delta \cdot T_1 = 1 \cdot \delta = \delta.$$

**(b) Differentiation**

Wir betrachten vorerst nur den Fall  $n = 1$ . Es sei  $f \in C^1(\mathbb{R})$  eine stetig-differenzierbare Funktion auf  $\mathbb{R}$ , also erst recht  $f \in L^1_{\text{loc}}$ . Insbesondere definieren  $T_f$  und  $T_{f'}$  reguläre Distributionen.

Es sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \varphi \subset (-R, R)$ , so dass  $\varphi(-R) = \varphi(R) = 0$ . Wir definieren  $(T_f)' := T_{f'}$ . Partielle Integration liefert dann

$$\begin{aligned} T_{f'}(\varphi) &= \int_{-R}^R f'(x)\varphi(x) dx = f(x)\varphi(x) \Big|_{-R}^R - \int_{-R}^R f(x)\varphi'(x) dx \\ &= - \int_{-R}^R f(x)\varphi'(x) dx = -T_f(\varphi'), \end{aligned}$$

Wobei wir  $\varphi(-R) = \varphi(R) = 0$  benutzen. Folglich gilt es für stetig-differenzierbares  $f$ ,  $T'_f(\varphi) = -T_f(\varphi')$  zu definieren. Diese Identität nehmen wir als Rechtfertigung für die allgemeine Definition der partiellen Ableitung  $D^\alpha T$ .

**Definition 7.9** Für  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und einen Multi-Index  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  definieren wir  $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  über

$$D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Die Linearität von  $D^\alpha$  ist klar, wir müssen die Stetigkeit zeigen. Dazu sei  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Nach Definition ist dann auch  $D^\alpha \varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  (gleichmäßige Konvergenz auf ganz  $\mathbb{R}^n$ ). Da  $T$  stetig ist, gilt  $T(D^\alpha \varphi_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Somit ist  $D^\alpha T(\varphi_n) \rightarrow 0$ ;  $D^\alpha T$  ist daher ein stetiges lineares Funktional auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und gehört somit zu  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

Man beachte, dass hier, bei der Stetigkeit der Differentiation, zum ersten Mal benutzt wird, dass bei der Folgenkonvergenz in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  alle Ableitungen gleichmäßig konvergieren müssen. Man beachte, dass Distributionen, partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzen.

**Lemma 7.7** Es sei  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist

(a) die Differentiation  $D^\alpha: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$  eine stetiger linearer Operator auf  $\mathcal{D}'$ , das heißt, wenn  $T_k \rightarrow T$  in  $\mathcal{D}'$  so folgt  $D^\alpha T_k \rightarrow D^\alpha T$  in  $\mathcal{D}'$  für  $k \rightarrow \infty$ .

(b)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a T) = \frac{\partial a}{\partial x_i} T + a \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{Produktregel für partielle Ableitungen}).$$

(c) Für beliebige zwei Multiindizes  $\alpha$  und  $\beta$  gilt

$$D^{\alpha+\beta} T = D^\alpha(D^\beta T) = D^\beta(D^\alpha T) \quad (\text{Schwarzsches Lemma}).$$

*Beweis.* (a) Angenommen  $T_k \rightarrow T$  für  $k \rightarrow \infty$  in  $\mathcal{D}'$ , das heißt, für alle  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt  $T_k(\psi) \rightarrow T(\psi)$ . Insbesondere gilt dies für  $\psi = D^\alpha \varphi$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Also gilt

$$(-1)^{|\alpha|} D^\alpha T_n(\varphi) = T_n(D^\alpha \varphi) \rightarrow T(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha T(\varphi).$$

Da dies für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt, folgt die Behauptung.

(b) Es sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) &= \frac{\partial T}{\partial x_i}(a \varphi) = -T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(a \varphi)\right) \\ &= -T(a_{x_i}(x)\varphi) - T\left(a \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -a_{x_i} T(\varphi) - a T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \\ &= -a_{x_i} T(\varphi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(a T)(\varphi) = \left(-a_{x_i} T + \frac{\partial}{\partial x_i}(a T)\right)(\varphi). \end{aligned}$$

Streicht man auf beiden Seiten das Argument  $\varphi$ , so erhält man die Behauptung.

(c) Der Beweis verläuft ähnlich wie in (a) und (b) und benutzt  $D^{\alpha+\beta} \varphi = D^\alpha(D^\beta \varphi)$  für  $\varphi \in \mathcal{D}$ . ■

Man beachte, dass die Differentiation  $d: C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$  oder im Hilbertraum  $d: C^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  nicht stetig ist.

**Beispiel 7.7** (a) Es sei  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt

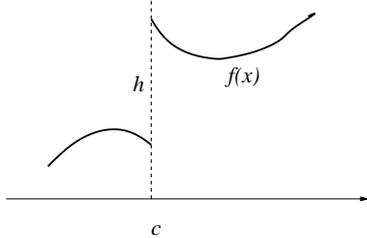
$$D^\alpha \delta_a(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \delta_a(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(a)$$

$$D^\alpha T_f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx.$$

(b) Die sogenannte *Heavisidefunktion*  $H(x)$  ist definiert als charakteristische Funktion der positiven Halbachse,  $H = \chi_{(0,+\infty)}$ . Offensichtlich ist sie lokal integrierbar,  $T_H$  ist daher eine reguläre Distribution. Wir berechnen die Ableitung  $(T_H)' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ :

$$T'_H(\varphi) = - \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^\infty \varphi(x)' dx = -\varphi(x) \Big|_0^\infty = \varphi(0) = \delta(\varphi).$$

Also gilt  $T'_H = \delta$ .



(c) Wir verallgemeinern diese Beispiel. Sei  $f(x)$  differenzierbar auf  $G = \mathbb{R} \setminus \{c\} = (-\infty, c) \cup (c, \infty)$  mit einer Sprungstelle bei  $c$

Die Ableitung von  $T_f$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ist dann

$$T'_f = T_{f'} + h \delta_c, \quad \text{wobei} \quad h = f(c+0) - f(c-0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (f(c+\varepsilon) - f(c-\varepsilon)),$$

die Sprunghöhe von  $f$  bei  $c$  ist. Tatsächlich gilt für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T'_f(\varphi) &= -T_f(\varphi') = - \left( \int_{-\infty}^c + \int_c^\infty \right) f(x) \varphi'(x) dx \\ &= -f(c-0)\varphi(c) + f(c+0)\varphi(c) + \left( \int_{-\infty}^c + \int_c^\infty \right) f'(x) \varphi(x) dx \\ &= ((f(c+0) - f(c-0))\delta_c + T_{f'(x)})(\varphi) \\ &= (h \delta_c + T_{f'}) (\varphi). \end{aligned}$$

(d) Wir zeigen, dass  $f(x) = \ln|x|$  zu  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  gehört, siehe ÜA Serie 8.2, und berechnen die Ableitung in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

*Beweis.* Da  $f$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  stetig ist, genügt es zu zeigen, dass  $f$  in einer Umgebung von 0 integrierbar ist. Da das Integral

$$\int_0^1 \ln x dx \stackrel{x=e^t, dx=e^t dt}{=} \int_{-\infty}^0 t e^t dt = t e^t \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^t dt = -1$$

als uneigentliches Riemannintegral (oder Lebesgueintegral) existiert, ist  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  und somit existiert die reguläre Distribution  $T_{\ln|x|}$ .

Wir zeigen, dass  $T'_f = \mathcal{D}' \frac{1}{x}$ .

Es sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \varphi \subseteq (-R, R)$ . Für alle  $\varepsilon > 0$  gilt  $\int_{-R}^R = \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R$ ; also kann man auf der rechten Seite auch zum Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  über gehen und erhält nach wie vor  $\int_{-R}^R$ . Nach Definition der Ableitung ist

$$\begin{aligned} T'_{\ln|x|}(\varphi(x)) &= -T_{\ln|x|}(\varphi'(x)) = - \int_{-R}^R \ln|x| \varphi'(x) dx \\ &= - \left( \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \ln|x| \varphi'(x) dx \right). \end{aligned}$$

Wegen  $\left| \int_{-1}^1 \ln|x| \varphi'(x) dx \right| < \infty$ , konvergiert das mittlere Integral  $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \ln|x| \varphi'(x) dx$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen Null; dies gilt erneut aufgrund des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, angewandt auf die stetige Funktionenfamilie  $g_\varepsilon(x) = \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x) \ln|x| \varphi'(x)$ , die punktweise gegen 0 geht und durch die integrierbare Funktion  $\ln|x| \varphi'(x)$  majorisiert wird.

Wir berechnen das dritte Integral mittels partieller Integration: Unter Beachtung von  $\varphi(+R) = 0$  haben wir

$$\int_{\varepsilon}^R \ln x \varphi'(x) dx = \ln x \varphi(x) \Big|_{\varepsilon}^R - \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x)}{x} dx = \ln \varepsilon \varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Analog hat man

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \ln(-x) \varphi'(x) dx = -\ln \varepsilon \varphi(-\varepsilon) - \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Die Summe der beiden Ausdrücke ergibt

$$\ln \varepsilon \varphi(\varepsilon) - \ln \varepsilon \varphi(-\varepsilon) - \left( \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

Der integralfreie Term konvergiert gegen 0 für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , da  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$ . Der andere konvergiert gegen  $-\mathcal{D} \frac{1}{x}(\varphi)$ .

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \varepsilon \varphi(\varepsilon) - \ln \varepsilon \varphi(-\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} 2\varepsilon = 2\varphi'(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0.$$

Folglich ist

$$T'_f(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx = \mathcal{D} \frac{1}{x}(\varphi).$$

■

### (c) Konvergenz von Folgen und Fourier-Reihen

Zur Erinnerung: Eine Funktionenfolge  $(f_k)$  konvergiert auf  $K$  *gleichmäßig* gegen eine Funktion  $f$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall k \geq k(\varepsilon) \forall x \in K: |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

**Bemerkung 7.6 Wichtige Sätze zur gleichmäßigen Konvergenz.**

(a) Wenn  $(f_k)$  auf  $K$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert und  $f_k$  ist stetig für alle  $k$ , dann ist  $f$  stetig auf  $K$ .

(b) Wenn  $f_k$  auf  $K$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert und  $f_k$  ist Riemann-integrierbar auf  $K$  für alle  $k$ , dann ist auch  $f$  Riemann-integrierbar auf  $K$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_K f_k(x) dx = \int_K f(x) dx$ .

(c) Wenn  $f_k$  differenzierbar ist auf  $K$  und  $(f'_k)$  konvergiert gleichmäßig auf  $K$  gegen  $g$ , dann konvergiert auch  $(f_k)$  gleichmäßig gegen ein  $f$  auf  $K$  und  $f' = g$ .

(d) **Kriterium von Weierstraß.** Es sei  $(f_k)$  eine Funktionenfolge auf  $K$  und  $(c_k)$ ,  $c_k \geq 0$ , eine reelle Zahlenfolge mit

1.  $|f_k(x)| \leq c_k$  für alle  $k$  und für alle  $x \in K$ .
2.  $\sum_k c_k < \infty$ .

Dann konvergiert  $\sum_k f_k$  gleichmäßig auf  $K$  gegen eine Funktion  $f$ .

(e) Definition. Die Funktionenfolge  $(f_k)$  konvergiert auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  *lokal-gleichmäßig* gegen eine Funktion  $f$ , wenn für alle kompakten Teilmengen  $K \subset \Omega$  die Funktionenfolge auf  $K$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

**Lemma 7.8** Es sei  $(f_k)$  eine Folge lokal-integrierbarer Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ , die auf  $\mathbb{R}^n$  lokal-gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$  konvergiert.

(a) Dann gilt  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  und  $T_{f_k} \rightarrow T_f$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

(b) Für alle Multiindizes  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  gilt:  $D^\alpha T_{f_k} \rightarrow D^\alpha T_f$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

*Beweis.* (a) Es sei  $K$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ ; wir zeigen, dass  $f \in L^1(K)$ . Da  $f_k$  auf  $K$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, ist nach (b) (siehe oben)  $f$  auf  $K$  integrierbar, also  $\int_K f dx < \infty$  und außerdem  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_K f_k(x) dx = \int_K f dx$ .

Wir zeigen die Konvergenz  $T_{f_k} \rightarrow T_f$  in  $\mathcal{D}'$ . Es sei  $\varphi \in \mathcal{D}$  mit  $\text{supp } \varphi \subset K$ . Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $(f_k \cdot \varphi)$  auf  $K$  und erneut wegen (b) haben wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_{f_k}(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_K f_k(x) \varphi(x) dx = \int_K \left( \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right) \varphi(x) dx = \int_K f(x) \varphi(x) dx = T_f(\varphi).$$

Da dies für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$  gilt, folgt  $T_{f_k} \rightarrow T_f$  in  $\mathcal{D}'$ .

(b) Nach Lemma 7.7 (a), ist die Differentiation in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  eine stetige Operation. Folglich haben wir  $D^\alpha T_{f_k} \rightarrow D^\alpha T_f$  für  $k \rightarrow \infty$  in  $\mathcal{D}'$ . ■

**Beispiel 7.8** (a) Es sei  $(c_n)$  eine komplexe Zahlenfolge und  $a, b > 0$  und  $m \in \mathbb{N}$  seien derart gegeben, dass  $|c_n| \leq a|n|^m + b$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ , das heißt, die Folge  $(c_n)$  ist *polynomial beschränkt*. Dann konvergiert die Fourierreihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx},$$

in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

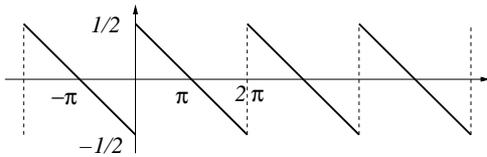
*Beweis.* Wir betrachten zunächst die  $(m+2)$ -fach „integrierte“ Reihe

$$\frac{c_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{c_n}{(ni)^{m+2}} e^{inx}. \quad (7.6)$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\left| \frac{c_n}{(ni)^{m+2}} e^{inx} \right| = \left| \frac{c_n}{(ni)^{m+2}} \right| \leq \frac{a |n|^m + b}{|n|^{m+2}} \leq \frac{\tilde{a}}{|n|^2}.$$

Wegen  $\sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{a}}{|n|^2} < \infty$ , konvergiert die Reihe (7.6) gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$  nach dem Kriterium von Weierstraß, Bemerkung 7.6 (c). Nach Lemma 7.8, konvergiert die Reihe (7.6) dann auch in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  und kann beliebig oft gliedweise differenziert werden. Die  $(m+2)$ -te Ableitung von (7.6) ist genau die gegebene Fourierreihe. ■



Die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}$ ,  $x \in [0, 2\pi)$  hat bei  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  Sprungstellen der Höhe 1, denn es ist  $f(0+0) - f(0-0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .

Daher gilt für die Ableitung in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$T'_{f(x)} = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}.$$

dabei ist  $-\frac{1}{2\pi}$  die klassische Ableitung des differenzierbaren Anteils von  $f$ . Die Fourierreihe von  $f$  ist

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} e^{inx}.$$

Wegen der Vollständigkeit des Orthonormalsystems  $\{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , stimmen  $f$  und  $g(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} e^{inx}$  als Funktionen im  $L^2(0, 2\pi)$  überein; das heißt,  $\int_0^{2\pi} |f - g|^2 = 0$ . Somit gilt  $f = g$  f. ü. auf  $[0, 2\pi]$  und damit auch f. ü. auf  $\mathbb{R}$ . Somit sind  $f$  und  $g$  als lokal-integrierbare Funktionen gleich. Folglich stimmen die zugehörigen regulären Distributionen in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  überein:  $T_f = T_g$ .

$$T_f = T \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} e^{inx} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Nach Lemma 7.8 kann die Reihe gliedweise beliebig oft differenziert werden, man erhält stets eine in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  gültige Identität. Nach Beispiel 7.7 erhalten wir als erste Ableitung:

$$T_{f'} = T \left( -\frac{1}{2\pi} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n} \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} T e^{inx} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Bringt man  $-\frac{1}{2\pi}$  noch auf die rechte Seite, so erhält man

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} T e^{inx}.$$

(b)  $x^m T = 0$ . Es sei  $a(x) = x^m$ . Eine Lösung der Gleichung  $a \cdot T = 0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ist

$$T = \sum_{n=0}^{m-1} c_n \delta^{(n)}, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Nach ÜA 8.2 gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$  und für alle  $n = 0, \dots, m-1$

$$a \cdot \delta^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \delta \left( (x^m \varphi(x))^{(n)} \right) = (-1)^n (x^m \varphi(x))^{(n)} \Big|_{x=0} = 0;$$

Also erfüllt das obige  $T$  die Gleichung  $aT = 0$ . Man kann sogar zeigen, dass dies die einzigen Lösungen von  $aT = 0$  sind, siehe etwa [Wla72, p. 84].

(c) Die allgemeine Lösung der gDGL  $u^{(m)} = 0$  in  $\mathcal{D}'$  stimmt mit der klassischen Lösung überein, es ist  $u = T_p$  mit einem Polynom  $p$  vom Grad  $m-1$ .

*Beweis.* Wir beweisen dies nur für  $m = 1$ . Wir zeigen also, dass  $T' = 0$  als einzige Lösung in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  die konstante reguläre Distribution hat,  $T = cT_1$ . Der allgemeine Fall  $m > 1$  folgt mit Hilfe von vollständiger Induktion über  $m$ .

Sei also  $T' = 0$ . Das heißt, für alle  $\psi \in \mathcal{D}$  gilt  $0 = T'(\psi) = -T(\psi')$ . Insbesondere gilt für  $\varphi, \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , dass

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x (\varphi(t) - d\eta(t)) dt, \quad \text{wobei} \quad d = T_1(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx,$$

zu  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  gehört, da sowohl  $\varphi$  als auch  $\eta$  Testfunktionen sind. Dabei ist  $\eta$  eine Hilfsfunktion mit  $\int \eta(x) dx = 1$ . Dann ist nämlich für großes  $R$ ,  $\text{supp } \eta \subset (-R, R)$ ,  $\psi(R) = \int_{-\infty}^R \varphi(x) dx - d \cdot 1 = d - d = 0$ . Wegen  $T(\psi') = 0$  und  $\psi' = \varphi - d\eta$  erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= T(\psi') = T(\varphi - d\eta) = T(\varphi) - T(\eta) T_1(\varphi) \\ &= T(\varphi) - cT_1(\varphi) = (T - cT_1)(\varphi), \end{aligned}$$

wobei  $c = T(\eta)$ . Da dies für alle Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt, erhalten wir  $0 = T - cT_1$  bzw.  $T = cT_1$ , was die Behauptung beweist. ■

## 7.3 Tensor Produkt und Faltung von Distributionen

### 7.3.1 Der Träger einer Distribution

Wir hatten bereits betont, dass man nicht vom „Wert einer Distribution  $T$  am Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ “ reden kann.

**Definition 7.10** Es sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Wir sagen, dass  $T$  in  $x_0$  *verschwindet*,  $T(x_0) = 0$ , falls es ein  $\varepsilon > 0$  derart gibt, dass  $T(\varphi) = 0$  für alle Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \varphi \subseteq U_\varepsilon(x_0)$ . Wir sagen, dass die Distributionen  $T$  und  $S$  im Punkte  $x_0$  *gleich sind*,  $T(x_0) = S(x_0)$ , wenn  $T - S$  in  $x_0$  verschwindet.

Es gilt:  $T = S$  genau dann, wenn  $T(x_0) = S(x_0)$  für alle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Das heißt, sind zwei Distributionen *lokal gleich* in allen Punkten, so stimmen sie auch global überein.

Aus der Definition folgt: Die Menge  $n(T)$  der Punkte des  $\mathbb{R}^n$ , in denen  $T$  verschwindet, ist offen, denn wenn  $T$  in  $x_0$  verschwindet, also  $T(\varphi) = 0$  für alle Testfunktionen mit Träger in  $U_\varepsilon(x_0)$ , dann verschwindet  $T$  auch in allen Punkten von  $U_\varepsilon(x_0)$ .

**Definition 7.11** Es sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann heißt die Menge  $\text{supp } T := \mathbb{R}^n \setminus n(T)$  der *Träger* der Distribution  $T$ . Der Träger besteht also aus allen  $x \in \mathbb{R}^n$  wo  $T$  nicht verschwindet, also

$$\text{supp } T = \{x \mid \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \text{supp } \varphi \subset U_\varepsilon(x) \text{ und } T(\varphi) \neq 0\}.$$

**Bemerkung 7.7** (a) Nach Definition ist  $\text{supp } T$  abgeschlossen. Für beliebige lokal integrierbare Funktionen gilt jedoch  $\text{supp } T_f \subset \text{supp } f$ . Wir zeigen:  $\mathbb{R}^n \setminus \text{supp } f \subset n(T_f)$ . Sei  $x_0$  nicht im Träger von  $f$ . Nach Bemerkung 7.1 (b) gibt es dann ein  $\varepsilon > 0$ , wo  $f \equiv 0$ . Dann gilt aber für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \varphi \subset U_\varepsilon(x_0)$

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx = \int_{U_\varepsilon(x_0)} f(x)\varphi(x) dx = 0.$$

Ist  $f$  stetig, dann gilt  $\text{supp } T_f = \text{supp } f$ ;

(b)  $\text{supp } \delta_a = \{a\}$ , das heißt,  $\delta_a$  verschwindet in jedem Punkt  $b \neq a$ . Tatsächlich gibt es zu  $b$  die Umgebung  $U_{|b-a|/2}$ , so das für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$  gilt mit Träger in  $U_{(b-a)/2}$ , dass  $\delta_a(\varphi) = \varphi(a) = 0$ . Ferner ist  $\text{supp } T_H = [0, +\infty)$  und  $\text{supp } T_{\chi_{\mathbb{Q}}} = \emptyset$ .

## 7.3.2 Das Tensorprodukt

### (a) Tensorprodukt von Funktionen

Es seien  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben. Dann ist das *Tensorprodukt*  $f \otimes g: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert über  $f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ .

Sind  $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ ,  $k = 1, \dots, r$ , dann bezeichnen wir die Funktion  $\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^r \varphi_k(x)\psi_k(y)$  die auf  $\mathbb{R}^{n+m}$  definiert ist, durch  $\varphi = \sum_k \varphi_k \otimes \psi_k$ . Die Menge solcher Linearkombinationen  $\sum_{k=1}^r \varphi_k \otimes \psi_k$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ . Dies ist wieder ein linearer Raum. Aus der Differenzierbarkeit von  $\varphi_k$  und  $\psi_k$  folgt die Differenzierbarkeit von  $\varphi$ ,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ .

Seien ferner  $K_1 \subset \mathbb{R}^n$  und  $K_2 \subset \mathbb{R}^m$  die gemeinsamen Träger der Familie von Funktionen  $\{\varphi_k\}$  bzw.  $\{\psi_k\}$ . Dann ist  $\text{supp } \varphi \subset K_1 \times K_2$ . Da  $K_1$  als auch  $K_2$  beschränkt sind, ist auch  $K_1 \times K_2$  beschränkt. Also ist  $\text{supp } \varphi$  kompakt und somit gilt  $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ . Daher gilt

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}).$$

Darüber hinaus ist  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  ein *dichter* Teilraum von  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ . Das heißt, dass für jedes  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$  natürliche Zahlen  $m, r_m \in \mathbb{N}$  existieren und Testfunktionen  $\varphi_{mk} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi_{mk} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ , sodass

$$\sum_{k=1}^{r_m} \varphi_{mk} \otimes \psi_{mk} \xrightarrow{\mathcal{D}} \eta \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

**(b) Das Tensorprodukt von Distributionen**

**Definition 7.12** Es seien  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  Distributionen. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Distribution  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$  sodass für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$

$$F(\varphi \otimes \psi) = T(\varphi)S(\psi).$$

Diese Distribution  $F$  bezeichnen wir mit  $T \otimes S$ .

Klar ist, dass  $T \otimes S$  ein auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  definiertes stetiges, lineares Funktional ist. Da  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  dicht in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$  liegt, lässt es sich eindeutig zu einem stetigen linearen Funktional auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$  fortsetzen;  $(T \otimes S)(\sum_{k=1}^r \varphi_k \otimes \psi_k) = \sum_{k=1}^r T(\varphi_k)S(\psi_k)$ . So ist zum Beispiel für  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  das Tensorprodukt  $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$ . Denn es gilt für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ , dass

$$(\delta_a \otimes \delta_b)(\varphi \otimes \psi) = \varphi(a)\psi(b) = (\varphi \otimes \psi)(a, b) = \delta_{(a,b)}(\varphi \otimes \psi).$$

**Lemma 7.9** Es sei  $F = T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$  das Tensorprodukt der Distributionen  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  und  $\eta = \eta(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ .

Dann ist für alle fixierten  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  die von  $y \in \mathbb{R}^m$  abhängige Funktion  $\eta(x_0, y)$  eine Testfunktion aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ . Für jedes  $x_0$  in  $\mathbb{R}^n$  ist also die Zahl  $\varphi(x_0) := S(\eta(x_0, \cdot))$  erklärt. Diese Zuordnung  $x_0 \mapsto \varphi(x_0)$  ist eine Testfunktion aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Analog ist  $\psi(y) := T(\eta(\cdot, y))$  eine Testfunktion aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  und es gilt

$$(T \otimes S)(\eta) = S(T(\eta)) = T(S(\eta)).$$

*Beweis.* (Beweisidee aus [Wla72, II.7, S. 94 ff]) Die Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  ist wohldefiniert und hat (wie  $\eta$ ) einen kompakten Träger. Wir zeigen die Stetigkeit in  $a \in \mathbb{R}^n$ . Dazu sei  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  eine gegen  $a$  konvergente Folge. Wegen der Stetigkeit von  $\eta$  gilt dann:

$$\eta(x_k, y) \xrightarrow{\mathcal{D}} \eta(a, y) \quad \text{im Raum } \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Wegen der Stetigkeit von  $S$  auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  folgt weiter

$$\varphi(x_k) = S(\eta(x_k, \cdot)) \rightarrow S(\eta(a, \cdot)) = \varphi(a), \quad k \rightarrow \infty.$$

Analoges gilt für  $\psi$ . ■

**Beispiel 7.9** (a) *Tensorprodukt regulärer Distributionen.* Es seien  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  und  $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ . Dann ist  $f \otimes g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+m})$  und  $T_f \otimes T_g = T_{f \otimes g}$ . Nach Fubinis Theorem ist nämlich, für alle Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} (T_f \otimes T_g)(\varphi \otimes \psi) &= T_f(\varphi) T_g(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\psi(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)g(y)\varphi(x)\psi(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \otimes g(x, y)\varphi \otimes \psi(x, y) dx dy = T_{f \otimes g}(\varphi \otimes \psi). \end{aligned}$$

(b) Es sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ ,  $\eta = \eta(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ . Dann gilt  $\delta_{x_0} \otimes S(\eta) = S(\eta(x_0, \cdot))$ . In der Tat ist für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$

$$\delta_{x_0} \otimes S(\varphi \otimes \psi) = \delta_{x_0}(\varphi) S(\psi) = \varphi(x_0) S(\psi) = T(\varphi(x_0)\psi(y)).$$

Insbesondere gilt

$$(\delta_a \otimes T_g)(\eta) = \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\eta(a, y) dy.$$

Insbesondere gilt für  $S = \delta_{y_0}$ , dass  $\delta_{x_0} \otimes \delta_{y_0} = \delta_{(x_0, y_0)}$ .

(c) Für alle Multiindizes  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $\beta \in \mathbb{N}_0^m$  gilt,

$$D^{\alpha+\beta}(T \otimes S) = (D_x^\alpha T) \otimes (D_y^\beta S) = D^\beta((D_x^\alpha T) \otimes S) = D^\alpha(T \otimes D^\beta S).$$

*Beweis für den Fall  $n = m = 1$ .* Es seien  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(T \otimes S)(\varphi \otimes \psi) &= -(T \otimes S)\left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi \otimes \psi)\right) \\ &= -(T \otimes S)(\varphi' \otimes \psi) = -T(\varphi')S(\psi) = T'(\varphi)S(\psi) \\ &= (T' \otimes S)(\varphi \otimes \psi). \end{aligned}$$

### 7.3.3 Die Faltung

Motivation: Kennt man die Fundamentallösung  $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'$  eines linearen partiellen Differentialoperators  $L$ , also  $L[\mathcal{E}] = \delta$ , so kann man sofort die inhomogene PDGl  $L[u] = f$  mit beliebiger rechter Seite  $f$  lösen, und zwar ist  $u = \mathcal{E} * f$ , wobei  $*$  die Faltung der Distribution und der Funktion  $f$  bezeichnet. Für Funktionen in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  war das Faltungsprodukt bereits in Definition 7.3 gegeben. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x-y)| |g(y)| dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_{L^1} dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $f * g(x)$  fast überall auf  $\mathbb{R}^n$  endlich.

#### (a) Faltung von Funktionen

Das Grundproblem bei der Faltung ist, dass die Faltung zweier Testfunktionen i. a. nicht wieder eine Testfunktion zu sein braucht — der Träger der Faltung muss nicht mehr kompakt sein. Selbst wenn  $f$  und  $g$  lokal integrierbar sind, braucht  $f * g$  nicht mehr lokal integrierbar zu sein. In den folgenden drei Fällen jedoch, geht bei  $f * g$  alles gut

1. Mindestens eine der beiden Funktionen  $f$  und  $g$  hat kompakten Träger.
2. Der Träger beider Funktionen  $f$  und  $g$  liegt in  $[0, +\infty)$ .
3. Beide Funktionen liegen in  $L^1(\mathbb{R})$ .

In diesem Fall ist die Faltung  $(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y) dy$  auch über  $\mathbb{R}$  integrierbar (s. o.). Die Faltung ist dann ein kommutatives, assoziatives Produkt auf  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

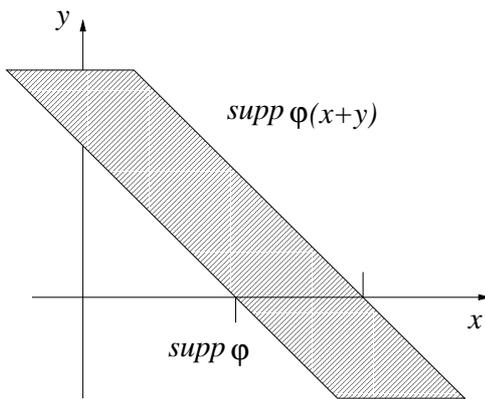
### (b) Die Faltung von Distributionen

Wir folgen unserem *Allgemeinen Prinzip* um zunächst die Faltung von regulären Distributionen zu studieren. Dazu seien  $f, g, f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Wir fordern, dass  $T_f * T_g = T_{f * g}$ . Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ist dann,

$$\begin{aligned} T_{f * g}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) \varphi(x) dx = \iint_{\mathbb{R}^2} f(y) g(x - y) \varphi(x) dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(y) g(t) \varphi(y + t) dy dt = T_{f \otimes g}(\tilde{\varphi}), \end{aligned} \quad (7.7)$$

wobei  $\tilde{\varphi}(y, t) = \varphi(y + t)$ .



Es gibt zwei Schwierigkeiten zu überwinden:

(a) Im Allgemeinen ist  $\tilde{\varphi}$  *keine* Testfunktion, da ihr Träger in  $\mathbb{R}^{2n}$  unbeschränkt ist. Es ist  $(y, t) \in \text{supp } \tilde{\varphi}$ , falls  $y + t = c \in \text{supp } \varphi$ , was eine Familie von Geraden ergibt, die parallel verlaufen und einen unendlichen Streifen beschreiben.

(b) Das Integral existiert nicht. Das zweite Problem wird gelöst, indem wir als zusätzliche Bedingungen fordern, dass die Menge

$$K_\varphi = \{(y, t) \in \mathbb{R}^{2n} \mid y \in \text{supp } T_f, t \in \text{supp } T_g, y + t \in \text{supp } \varphi\}$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  **beschränkt** ist. Dann existiert auch das Integral (7.7).

Das Problem (a) wird gelöst, indem die Funktion  $\tilde{\varphi}$  geeignet „abgeschnitten“ wird. Wir definieren

$$T_{f * g}(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (T_f \otimes T_g)(\varphi(y + t) \eta_k(y, t)),$$

wobei  $\eta_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 1$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$  für  $k \rightarrow \infty$ . Eine solche Testfunktionenfolge  $\eta_k$  existiert. Sei etwa  $\eta(y, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$  gegeben durch  $\eta(y, t) = 1$  für  $\|y\|^2 + \|t\|^2 \leq 1$ . Setzt man dann für  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\eta_k(y, t) = \eta\left(\frac{y}{k}, \frac{t}{k}\right),$$

dann ist  $\eta_k(y, t) = 1$  für alle  $\|y\|^2 + \|t\|^2 \leq k$ . Es gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k(y, t) = 1$  für alle  $(y, t) \in \mathbb{R}^{2n}$ .

**Definition 7.13** Es seien  $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und wir setzen voraus, dass für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  die Menge

$$K_\varphi := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x + y \in \text{supp } \varphi, x \in \text{supp } T, y \in \text{supp } S\}$$

beschränkt ist. Definiere

$$T * S(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} T \otimes S(\varphi(x+y)\eta_k(x,y)). \quad (7.8)$$

Dann ist  $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und heißt *Faltung* der Distributionen  $T$  und  $S$ .

**Bemerkung 7.8** (a) Die Folge (7.8) wird für große  $k$  stationär, so dass der Grenzwert existiert. Es sei nämlich  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  fixiert, dann ist  $K_\varphi$  beschränkt. Folglich gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $\eta_k(x,y) = 1$  für alle  $x, y \in K_\varphi$  und alle  $k \geq k_0$ . Also verändert sich  $\varphi(x+y)\eta_k(x,y)$  nicht für  $k \geq k_0$ .

(b) Der Grenzwert ist stetig auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

(c) Der Grenzwert hängt nicht von der speziellen Wahl der Funktion  $\eta$  ab.

**Bemerkung 7.9 (Eigenschaften der Faltung)** (a) Hat eine der Distributionen  $S$  oder  $T$  einen kompakten Träger, dann existiert  $T * S$ . Möge etwa  $\text{supp } T$  kompakt sein. Dann folgt aus  $x + y \in \text{supp } \varphi$  und  $x \in \text{supp } T$ , dass  $y \in \text{supp } \varphi - \text{supp } T = \{y_1 - y_2 \mid y_1 \in \text{supp } \varphi, y_2 \in \text{supp } T\}$ . Folglich gilt für  $(x, y) \in K_\varphi$ , dass

$$\|(x, y)\| \leq \|x\| + \|y\| \leq \|x\| + \|y_1\| + \|y_2\| \leq 2C + D$$

wenn  $\text{supp } T \subset U_C(0)$  und  $\text{supp } \varphi \subset U_D(0)$ . Also ist  $K_\varphi$  beschränkt für alle  $\varphi$ .

(b) Wenn  $S * T$  existiert, so auch  $T * S$  und  $S * T = T * S$ .

(c) Wenn  $T * S$  existiert, so auch  $D^\alpha T * S$ ,  $T * D^\alpha S$  und  $D^\alpha(T * S)$ , und alle drei Terme stimmen überein:

$$D^\alpha(T * S) = D^\alpha T * S = T * D^\alpha S.$$

*Beweis.* Wir beschränken uns wieder auf den Fall  $m = n = 1$ . und  $D^\alpha = \frac{d}{dx}$ . Sei dazu  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , dann ist

$$\begin{aligned} (T * S)'(\varphi) &= -T * S(\varphi') = -\lim_{k \rightarrow \infty} T \otimes S(\varphi'(x+y)\eta_k(x,y)) \\ &= -\lim_{k \rightarrow \infty} T \otimes S\left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi(x+y)\eta_k(x,y)) - \varphi(x+y)\frac{\partial \eta_k}{\partial x}\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} T' \otimes S(\varphi(x+y)\eta_k(x,y)) - \lim_{k \rightarrow \infty} T \otimes S\left(\underbrace{\varphi(x+y)\frac{\partial \eta_k}{\partial x}}_{=0 \text{ für große } k}\right) \\ &= T' * S(\varphi) \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt benutzen wir die Kommutativität des Tensorproduktes und der Faltung. ■

Man beachte, dass die Existenz von  $S * T$  wichtig ist, denn es gilt

$$T_H' * T_1 = \delta * T_1 = T_1 \quad \text{aber} \quad T_H * T_1' = T_H * 0 = 0.$$

(d) Es sei  $\text{supp } S$  kompakt und  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  derart, dass  $\psi(y) = 1$  in einer Umgebung von  $\text{supp } S$ . Dann gilt:

$$(T * S)(\varphi) = T \otimes S(\varphi(x+y)\psi(y)), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

(e) Wenn  $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  alle kompakten Träger haben, dann existieren  $T_1 * (T_2 * T_3)$  und  $(T_1 * T_2) * T_3$  und sind gleich:  $T_1 * (T_2 * T_3) = (T_1 * T_2) * T_3$ .

### 7.3.4 Lineare Variablentransformation

Es sei  $y = Ax + b$  eine reguläre lineare Variablentransformation, d. h.  $A$  ist eine reguläre (d. h. invertierbare)  $n \times n$ -Matrix. Wir wenden unser *Allgemeines Prinzip* an und fordern für reguläre Distributionen  $T_f$  die bekannte Transformationsregel für Gebietsintegrale gilt: Sei  $f$  lokal integrierbar und  $\tilde{f}(x) = f(Ax + b)$  mit  $y = Ax + b$ ,  $x = A^{-1}(y - b)$ ,  $dy = |\det A| dx$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} T_{\tilde{f}}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + b)\varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(A^{-1}(y - b)) \frac{1}{|\det A|} dy \\ &= \frac{1}{|\det A|} T_{f(y)}(\varphi(A^{-1}(y - b))). \end{aligned}$$

**Definition 7.14** Es sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $A$  eine reguläre  $n \times n$ -Matrix und  $b \in \mathbb{R}^n$ . Dann bezeichnet  $T(Ax + b)$  die Distribution

$$T(Ax + b)(\varphi(x)) := \frac{1}{|\det A|} T(y)(\varphi(A^{-1}(y - b))).$$

Zum Beispiel ist für  $T = T(x)$ , und alle  $b \in \mathbb{R}^n$   $T(x - b)(\varphi(x)) = T(\varphi(x + b))$ , insbesondere,  $\delta(x - b) = \delta_b$ , denn

$$\delta(x - b)(\varphi(x)) = \delta(x)(\varphi(x + b)) = \varphi(0 + b) = \varphi(b) = \delta_b(\varphi).$$

**Beispiel 7.10** (a) Für alle  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\delta * S = S * \delta = S$ . Die Existenz der Faltung ist klar, da  $\delta$  kompakten Träger hat. Für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt daher

$$\begin{aligned} (\delta * S)(\varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \delta(x) \otimes S(y)(\varphi(x+y)\eta_k(x,y)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} S(y)(\varphi(y)\eta_k(0,y)) = S(\varphi) \end{aligned}$$

(b)  $\delta_a * S = S(x - a)$ . In der Tat ist

$$\begin{aligned} (\delta_a * S)(\varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_a \otimes S(\varphi(x+y)\eta_k(x,y)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} S(y)(\varphi(a+y)\eta_k(a,y)) = S(y)(\varphi(a+y)) = S(y - a)(\varphi). \end{aligned}$$

M. a. W., die Faltung mit  $\delta$  verändert eine Distribution nicht ( $\delta$  ist das Einselement bezüglich der Faltung), die Faltung mit  $\delta_a$  bewirkt eine Verschiebung um  $a$ .

Insbesondere ist  $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ .

(c) Es sei  $\varrho \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  und  $\text{supp } T_f$  sei kompakt. Dann gilt

Fall  $n = 2$ . Sei  $f(x) = \ln \frac{1}{\|x\|} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ . Dann heißt

$$V_2(x) = (\varrho * f)(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varrho(y) \ln \frac{1}{\|x-y\|} dy$$

logarithmisches (oder Flächenpotenzial) mit der Dichte  $\varrho$ .

Fall  $n \geq 3$ . Sei  $f(x) = \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Dann heißt

$$V_n(x) = (\varrho * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(y) \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} dy$$

Newtonsches Potenzial (oder Volumenpotenzial) mit der Dichte  $\varrho$ .

Wir werden später sehen, dass  $\Delta V_n = -(n-2)\omega_n\varrho$  für  $n \geq 3$ , wobei  $\omega_n$  die Oberfläche der  $(n-1)$ -Sphäre ist und dass  $\Delta V_2 = -2\pi\varrho$ .

(d) Für alle  $\alpha > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  sei  $f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$ . Dann gilt  $f_\alpha * f_\beta = f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ . Man zeige zunächst, dass  $\int f_\alpha(x) dx = 1$  und benutze dann quadratische Ergänzung.

### 7.3.5 Fundamentallösungen

Es sei  $L[u]$  ein linearer partielle Differentialoperator auf  $\mathbb{R}^n$ ,

$$L[u] = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha(x) D^\alpha u, \quad (7.9)$$

wobei die  $c_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  glatte Koeffizienten sind.

**Definition 7.15** Eine Distribution  $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  heißt *Fundamentallösung* des Differentialoperators  $L$  aus (7.9), wenn

$$L[\mathcal{E}] = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Man beachte, dass eine Fundamentallösung  $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  in der Regel nicht eindeutig bestimmt ist. Nach einem allgemeinen Resultat von Malgrange und Ehrenpreis (1952) gilt, dass jeder lineare partielle Differentialoperator mit *konstanten Koeffizienten* eine Fundamentallösung besitzt.

#### (a) Gewöhnliche DGI

Wir beginnen mit einem einführenden Beispiel aus den gDGI (ÜA, Serie 9).

**Lemma 7.10** Es sei  $u = u(x)$ ,  $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ , die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u^{(m)}(x) + a_1(x)u^{(m-1)}(x) + \dots + a_m(x)u(x) &= 0, \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(m-2)}(0) &= 0, \quad u^{(m-1)}(0) = 1. \end{aligned}$$

Für die reguläre Distribution  $\mathcal{E} = T_{Hu}$  gilt dann

$$\mathcal{E}^{(m)} + a_1\mathcal{E}^{(m-1)} + \dots + a_m\mathcal{E} = \delta, \quad (7.10)$$

in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , das heißt,  $L[\mathcal{E}] = \delta$  und  $\mathcal{E}$  ist eine Fundamentallösung von  $L$ .

*Beweis.* Mit der Leibniz-Regel, (Lemma 7.7 (b)), Beispiel 7.6 (b) und  $u(0) = 0$  folgt

$$\mathcal{E}' = (T_H)'u + T_H u' = \delta u + T_{Hu'} = u(0)\delta + T_{Hu'} = T_{Hu'}.$$

Analog erhält man

$$\mathcal{E}'' = T_{Hu''}, \quad \dots, \quad \mathcal{E}^{(m-1)} = T_{Hu^{(m-1)}}, \quad \mathcal{E}^{(m)} = u^{(m-1)}(0)\delta + T_{Hu^{(m)}} = \delta + T_{Hu^{(m)}}.$$

Setzt man dies alles in die linke Seite von (7.10) ein, so hat man

$$L[\mathcal{E}] = \mathcal{E}^{(m)} + a_1 \mathcal{E}^{(m-1)} + \dots + a_m \mathcal{E} = T_{HL[u]} + \delta = T_0 + \delta = \delta.$$

■

**Beispiel 7.11** Die folgenden linearen Differentialgleichungen haben die regulären Fundamentallösungen  $\mathcal{E} = T_E$ , wobei

$$\begin{aligned} y' + ay &= 0, & E(x) &= H(x)e^{-ax}, \\ y'' + a^2y &= 0, & E(x) &= H(x)\frac{\sin ax}{a}. \end{aligned}$$

### (b) Partielle Differentialgleichungen

Hier liegt das Hauptanwendungsfeld der Fundamentallösung: Wenn  $\mathcal{E}$  eine Fundamentallösung von  $L$  ist, dann hat man durch Faltung mit der rechten Seite  $f$  eine Lösung der inhomogenen Gleichung  $L[u] = f$ ,  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Theorem 7.11** Es sei  $L[u] = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha u$  ein linearer partieller Differentialoperator im  $\mathbb{R}^n$  mit konstanten Koeffizienten  $c_\alpha$  und  $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  sei eine Fundamentallösung von  $L$ . Sei ferner  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  eine Distribution, so dass die Faltung  $S = \mathcal{E} * f$  existiert.

Dann gilt  $L[S] = f$  in  $\mathcal{D}'$ . M. a. W., es ist  $S$  eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung  $L[u] = f$ .

In der Menge der Distributionen aus  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , für die die Faltung mit  $\mathcal{E}$  definiert ist, ist  $S$  die einzige Distribution mit  $L[S] = f$ .

*Beweis.* Nach Bemerkung 7.9 (b) gilt

$$L[S] = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha (\mathcal{E} * f) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha (\mathcal{E}) * f = L(\mathcal{E}) * f = \delta * f = f.$$

Angenommen,  $S_1$  und  $S_2$  sind beides Lösungen, also  $L[S_1] = L[S_2] = f$ . Dann ist

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= (S_1 - S_2) * \delta = (S_1 - S_2) * \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha \mathcal{E} = \sum_{|\alpha| \leq k} (S_1 - S_2) * D^\alpha (c_\alpha \mathcal{E}) = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha (S_1 - S_2) * c_\alpha \mathcal{E} = \sum_{|\alpha| \leq k} (c_\alpha D^\alpha S_1 - c_\alpha D^\alpha S_2) * \mathcal{E} = (L[S_1] - L[S_2]) * \mathcal{E} = (f - f) * \mathcal{E} = 0. \end{aligned}$$

(7.11)

In der dritten Gleichung benutzten wir, dass die  $c_\alpha$  konstant sind und in der vierten Gleichung, dass  $S_1 * \mathcal{E}$  und  $S_2 * \mathcal{E}$  existieren. ■

## 7.4 Fouriertransformation in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Wir wollen die Fouriertransformation von Distributionen definieren. Dazu wollen wir sie erst einmal auf dem Testfunktionenraum erklären. Sei also  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Dann ist die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx$$

von  $\varphi$  eine reell-analytische Funktion, die auf der ganzen reellen Achse holomorph ist. Insbesondere hat  $\widehat{\varphi}$  keinen kompakten Träger mehr. Es gilt sogar, dass  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{F}(\mathcal{D})$  nur die Nullfunktion gemeinsam haben.

Um dieses Problem,  $\mathcal{D} \cap \mathcal{F}(\mathcal{D}) = \{0\}$ , zu lösen, wird der Testfunktionenraum  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  vergrößert, so dass  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und dass  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  invariant unter der Fouriertransformation ist, also  $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemma 7.12** *Es sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Dann ist die Fouriertransformierte  $g(z) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} \varphi(t) dt$  holomorph in der ganzen komplexen Ebene und in jeder Halbebene  $H_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \leq a\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , beschränkt.*

*Beweis.* (a) Wir zeigen, dass der komplexe Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} (g(z+h) - g(z))/h$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  existiert. In der Tat ist

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \alpha_n \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} \frac{e^{-iht} - 1}{h} \varphi(t) dt.$$

Wegen  $\left| e^{-izt} \frac{e^{-iht} - 1}{h} \varphi(t) \right| \leq C$  für alle  $x \in \operatorname{supp}(\varphi)$ ,  $h \in \mathbb{C}$ ,  $|h| \leq 1$ , können wir Lebesgues Theorem über die majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \alpha_n \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-iht} - 1}{h} \varphi(t) dt = \alpha_n \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} (-it) \varphi(t) dt = \mathcal{F}(-it\varphi(t)).$$

(b) Sei nun  $\operatorname{Im}(z) \leq a$ . Dann gilt

$$|g(z)| \leq \alpha_n \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-it \operatorname{Re}(z)} \right| e^{t \operatorname{Im}(z)} |\varphi(t)| dt \leq \alpha_n \sup_{t \in K} |\varphi(t)| \int_K e^{ta} dt,$$

wobei  $K$  eine kompakte Menge ist, die  $\operatorname{supp} \varphi$  enthält. ■

### 7.4.1 Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

**Definition 7.16**  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist die Menge der glatten Funktionen  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , so dass für alle Multiindizes  $\alpha$  und  $\beta$  gilt:

$$p_{\alpha, \beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  heißt *Schwartzraum* oder Raum der „schnell-fallenden Funktionen“.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta : p_{\alpha, \beta}(f) < \infty\}.$$

Schwartzraumfunktionen fallen für  $\|x\| \rightarrow \infty$  schneller gegen Null als jede rationale Funktion  $\frac{p(x)}{q(x)}$ . Und das gilt auch für alle Ableitungen. Anstelle von  $p_{\alpha,\beta}$  benutzen wir auch die Halbnormen

$$p_{k,l}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} p_{\alpha,\beta}(\varphi), \quad k, l \in \mathbb{Z}_+.$$

Der Schwartzraum ist ein linearer Raum und  $p_{\alpha,\beta}$  sind Normen auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Es gilt  $e^{ax} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$  aber  $e^{-\|x\|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Der Schwartzraum ist sogar eine Algebra, das heißt, das Produkt  $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , falls  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Die Leibnizregel für höhere Ableitungen sichert nämlich, dass  $p_{kl}(\varphi \cdot \psi) < \infty$ . So ist etwa  $f(x) = p(x)e^{-ax^2+bx+c}$ ,  $a > 0$  für alle Polynome  $p$  und alle  $a > 0$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Da  $g(x) = e^{-|x|}$  bei 0 nicht differenzierbar ist, gehört  $g$  nicht zum Schwartzraum.

### Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

**Definition 7.17** Es seien  $\varphi_k, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Wir sagen, dass die Folge  $(\varphi_k)$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gegen  $\varphi$  konvergiert, symbolisch  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ , falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen für alle Multiindizes  $\alpha$  und  $\beta$  erfüllt ist:

$$\begin{aligned} p_{\alpha,\beta}(\varphi - \varphi_k) &\longrightarrow 0; \\ x^\beta D^\alpha(\varphi - \varphi_k) &\xrightarrow{\text{gleichmäßig}} 0, \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n; \\ x^\beta D^\alpha \varphi_k &\xrightarrow{\text{gleichmäßig}} x^\beta D^\alpha \varphi, \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

**Bemerkung 7.10** (a) In der Quantenmechanik werden Orts- und Impulsoperatoren auf dem Schwartzraum definiert wie folgt:  $Q_k$  und  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  sind gegeben durch

$$(Q_k \varphi)(x) = x_k \varphi(x), \quad (P_k \varphi)(x) = -i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

Unter  $P_k$  bzw.  $Q_k$  ist der Schwartzraum invariant, das heißt, für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt  $x^\beta D^\alpha \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

(b)  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Man beachte, dass eine rationale Funktion  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  über  $[1, +\infty)$  integrierbar ist, wenn  $q(x) \neq 0$  für alle  $x \geq 1$  und  $\deg q \geq \deg p + 2$ . Dann ist nämlich  $\frac{C}{x^2}$  eine obere Schranke von  $f$ , die integrierbar ist.

Dies wollen wir für den  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern. Problem: Unter welcher Bedingung an  $m$  ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + \|x\|^2)^m} < \infty.$$

Für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , ist  $x = r y$ , wobei  $r = \|x\|$  und  $y = \frac{x}{\|x\|}$  ein Einheitsvektor ist, der auf der Einheitssphäre  $S^{n-1}$  liegt. Man kann das  $n$ -dimensionale Gebietsintegral auch schreiben als iteriertes Integral über  $dr$  und über  $dS$ , wobei  $dS$  das  $n - 1$ -dimensionale Flächenelement der Sphäre  $S^{n-1}$  ist.

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_m = r^{n-1} dr dS.$$

Mit dieser Formel und mit Fubinis Theorem hat man

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+\|x\|^2)^m} = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \frac{r^{n-1} dr dS}{(1+r^2)^m} = \omega_{n-1} \int_0^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(1+r^2)^m},$$

wobei  $\omega_{n-1}$  das  $(n-1)$ -dimensionale Maß der Einheitskugel ist. Nach dem oben genannten Kriterium ist das Integral endlich, wenn  $2m - n + 1 > 1$  bzw. wenn  $m > n/2$ . Insbesondere ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{1+\|x\|^{n+1}} < \infty.$$

Im Falle  $n = 1$  ist dieses Integral gleich  $\pi$ .

Nach obigem ist also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |(1+\|x\|^{2n})\varphi(x)| \frac{dx}{1+\|x\|^{2n}} \\ &\leq C p_{0,2n}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{1+\|x\|^{2n}} < \infty. \end{aligned}$$

Folglich ist  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ .

(c)  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ; Für eine Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt  $p_{\alpha,\beta}(\varphi) < \infty$ , denn das Supremum einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge ist endlich. Der Schwartzraum ist echt größer als  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  denn  $f(x) = e^{-\|x\|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  aber wegen  $\text{supp } f = \mathbb{R}^n$  liegt  $f$  nicht in  $\mathcal{D}$ .

(d) Im Gegensatz zu  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ist  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ein metrischer Raum. Die Metrik ist gegeben durch

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k+l)}} \frac{p_{kl}(\varphi - \psi)}{1 + p_{kl}(\varphi - \psi)}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

**Definition 7.18** Es sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , dann ist die *Fouriertransformierte*  $\mathcal{F}f$  von  $f$  gegeben durch

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx,$$

wobei  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  und  $x \cdot \xi = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$ .

Wir bezeichnen den Normalisierungsfaktor mit  $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}$ . Achtung, diese Notation der Fouriertransformierten ist in der Literatur nicht einheitlich. So ist etwa bei Wladimirow, [Wla72] die Konvention mit  $e^{+i\xi \cdot x}$  unter dem Integral und der Normalisierungsfaktor vor dem Integral ist 1. Man beachte, dass  $\mathcal{F}f(0) = \hat{f}(0) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ .

**Beispiel 7.12** Wir berechnen die Fouriertransformierte  $\hat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$  von  $\varphi(x) = e^{-\|x\|^2/2} = e^{-\frac{1}{2}x \cdot x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(a)  $n = 1$ . Aus der reellen Analysis (Kapitel: Mehrdimensionale Integration, I.2.2 (c)) ist bekannt, dass  $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ . Mit Hilfe der Funktionentheorie kann man zeigen, dass auch für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+ai)^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ . Folglich gilt wegen  $\frac{1}{2}(x+i\xi)^2 + \frac{\xi^2}{2} = \frac{x^2}{2} + ix\xi$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2 - \frac{\xi^2}{2}} dx = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = \varphi(\xi).$$

Somit ist  $\varphi$  bei der Fouriertransformation invariant,  $\mathcal{F}(\varphi) = \varphi$ . Wir werden später noch andere Eigenfunktionen der Fouriertransformation angeben.

(b) *Allgemeines*  $n \geq 1$ . Nach obigem erhalten wir

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(\xi) &= \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k^2} e^{-i \sum_{k=1}^n x_k \xi_k} dx = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{1}{2} x_k^2 - i x_k \xi_k} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \prod_{k=1}^n \alpha_n \int e^{-\frac{1}{2} x_k^2 - i x_k \xi_k} dx_k\end{aligned}$$

$$\mathcal{F} \varphi(\xi) = \prod_{k=1}^n e^{-\frac{1}{2} \xi_k^2} = e^{-\frac{1}{2} \xi^2}.$$

Also geht auch im allgemeinen Fall die Funktion in sich selbst über. Mittels Skalierung  $x \mapsto cx$  erhält man

$$\mathcal{F} \left( e^{-\frac{c^2 x^2}{2}} \right) (\xi) = \frac{1}{c^n} e^{-\frac{\xi^2}{2c^2}}.$$

**Theorem 7.13** *Es seien  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt:*

- (i)  $\mathcal{F}(x^\alpha \varphi(x)) = i^{|\alpha|} D^\alpha(\mathcal{F} \varphi)$ , also  $\mathcal{F} \circ Q_k = -P_k \circ \mathcal{F}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .
- (ii)  $\mathcal{F}(D^\alpha \varphi(x))(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha (\mathcal{F} \varphi)(\xi)$ , also  $\mathcal{F} \circ P_k = Q_k \circ \mathcal{F}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .
- (iii)  $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und außerdem folgt aus  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ , dass  $\mathcal{F} \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{F} \varphi$ , das heißt, die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  ist ein stetiger linearer Operator auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .
- (iv)  $\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \alpha_n^{-1} \mathcal{F}(\varphi) \mathcal{F}(\psi)$ .
- (v)  $\mathcal{F}(\varphi \cdot \psi) = \alpha_n \mathcal{F}(\varphi) * \mathcal{F}(\psi)$
- (vi)

$$\mathcal{F}(\varphi(Ax + b))(\xi) = \frac{1}{|\det A|} e^{iA^{-1}b \cdot \xi} \mathcal{F} \varphi(A^{-T} \xi),$$

wobei  $A$  eine reguläre  $n \times n$ -Matrix ist und  $A^{-T}$  bezeichnet die zu  $A^{-1}$  transponierte Matrix. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi(\lambda x))(\xi) &= \frac{1}{|\lambda|^n} (\mathcal{F} \varphi) \left( \frac{\xi}{\lambda} \right), \\ \mathcal{F}(\varphi(x + b))(\xi) &= e^{ib \cdot \xi} (\mathcal{F} \varphi)(\xi).\end{aligned}$$

*Beweis.* (i) Wir beweisen die Aussage für  $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ . Der allgemeine Fall folgt daraus.

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} (\mathcal{F} \varphi)(\xi) = \alpha_n \frac{\partial}{\partial \xi_1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \varphi(x) dx.$$

Da  $\frac{\partial}{\partial \xi_1} (e^{-i\xi \cdot x}) \varphi(x) = -ix_1 e^{-i\xi \cdot x} \varphi(x)$  gegen 0 konvergiert für  $x \rightarrow \infty$ , können wir Integration und partielle Differentiation vertauschen,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} (\mathcal{F} \varphi)(\xi) = -\alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} ix_1 \varphi(x) dx = \mathcal{F}(-ix_1 \varphi(x))(\xi).$$

(ii) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei zunächst  $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ . Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x)\right)(\xi) &= \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \varphi_{x_1}(x) dx = -\alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_1} (e^{-i\xi \cdot x}) \varphi(x) dx \\ &= i\xi_1 \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-i\xi \cdot x}) \varphi(x) dx = i\xi_1 (\mathcal{F}\varphi)(\xi). \end{aligned}$$

(iii) Nach (i) und (ii) erhalten wir für  $|\alpha| \leq k$  und  $|\beta| \leq l$

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha D^\beta \mathcal{F}\varphi| &\leq \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha(x^\beta \varphi(x))| dx \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^l) \sum_{|\gamma| \leq k} |D^\gamma \varphi(x)| dx \\ &\leq c_2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + \|x\|^{l+n+1})}{(1 + \|x\|^{n+1})} \sum_{|\gamma| \leq k} |D^\gamma \varphi(x)| dx \\ &\leq c_3 \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left( (1 + \|x\|^{l+n+1}) \sum_{|\gamma| \leq k} |D^\gamma \varphi(x)| \right) \\ &\leq c_4 p_{k, l+n+1}(\varphi). \end{aligned}$$

Dies liefert  $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und außerdem, dass  $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  stetig ist.

(iv) Zunächst bemerken wir, dass  $L^1(\mathbb{R}^n)$  mit der Faltung eine kommutative Algebra ist, wobei  $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$ . Nach Definition und wegen Fubini ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi * \psi)(\xi) &= \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \psi(x-y) dy dx \\ &= \alpha_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y) \cdot \xi} \psi(x-y) dx \right) \alpha_n e^{-iy \cdot \xi} \varphi(y) dy \\ &= \alpha_n^{-1} \mathcal{F}\psi(\xi) \mathcal{F}\varphi(\xi). \end{aligned}$$

(v) wird später gezeigt, nach Satz 7.14.

(vi) folgt unmittelbar unter Verwendung von  $A^{-1}(y)(\xi) = y(A^{-\top}(\xi))$ . ■

**Bemerkung 7.11** Ähnliche Eigenschaften wie  $\mathcal{F}$  hat der Operator  $\mathcal{G}$ , der genau wie  $\mathcal{F}$  auf  $L^1(\mathbb{R}^n)$  definiert ist:

$$\mathcal{G}\varphi(\xi) = \check{\varphi}(\xi) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{+ix \cdot \xi} \varphi(x) dx.$$

Setzt man  $\varphi_-(x) := \varphi(-x)$ , so gilt

$$\mathcal{G}\varphi = \mathcal{F}\varphi_- = \overline{\mathcal{F}(\overline{\varphi})} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}\varphi = \mathcal{G}\varphi_- = \overline{\mathcal{G}(\overline{\varphi})}.$$

Man erkennt leicht, dass (iv) auch für den Operator  $\mathcal{G}$  gilt:

$$\mathcal{G}(\varphi * \psi) = \alpha_n^{-1} \mathcal{G}(\varphi) \mathcal{G}(\psi).$$

**Satz 7.14 (Inverse Fouriertransformation)** Die Fouriertransformation ist eine bijektive lineare Abbildung  $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Die inverse Fouriertransformation ist gegeben durch  $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}\varphi) = \mathcal{G}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*Beweis.* Es sei  $\psi(x) = e^{-\frac{x \cdot x}{2}}$  and  $\Psi(x) = \psi(\varepsilon x) = e^{-\frac{\varepsilon^2 x^2}{2}}$ . Dann gilt  $\Psi_\varepsilon(x) := \mathcal{F}\Psi(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . Es ist

$$\alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\varepsilon(x) dx = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = \hat{\psi}(0) = 1.$$

Außerdem hat man

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \varphi(\varepsilon x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \varphi(0) dx = \varphi(0). \quad (7.12)$$

Mit anderen Worten,  $\alpha_n \Psi_\varepsilon(x)$  ist eine  $\delta$ -Folge.

Wir berechnen  $\mathcal{G}(\mathcal{F}\varphi\Psi)(x)$ . Mit Fubinis Theorem folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{F}\varphi\Psi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}\varphi)(\xi) \Psi(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(\xi) e^{ix \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot y} \varphi(y) dy d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y-x) \cdot \xi} \Psi(\xi) d\xi dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) (\mathcal{F}\Psi)(y-x) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\Psi(z) \varphi(z+x) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\varepsilon(z) \varphi(z+x) dz \\ &\xrightarrow{\text{für } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ vgl. (7.12)}} \varphi(x). \end{aligned}$$

Nach Lebesgues Theorem über die majorisierte Konvergenz ist,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{G}(\mathcal{F}\varphi \cdot \Psi)(x) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}\varphi)(\xi) \psi(0) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}\varphi)(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \mathcal{G}(\mathcal{F}\varphi)(x).$$

Hieraus folgt die erste Identität. Die zweite Identität  $\mathcal{F}(\mathcal{G}\varphi) = \varphi$  folgt aus  $\mathcal{G}(\varphi) = \overline{\mathcal{F}(\overline{\varphi})}$ ,  $\mathcal{F}(\varphi) = \overline{\mathcal{G}(\overline{\varphi})}$  und der ersten Identität. ■

Wir beenden nun den Beweis von Theorem 7.13 (v). Dazu sei  $\varphi = \mathcal{G}\varphi_1$  und  $\psi = \mathcal{G}\psi_1$  mit  $\varphi_1, \psi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Nach (iv) ist dann

$$\mathcal{F}(\varphi \cdot \psi) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(\varphi_1)\mathcal{G}(\psi_1)) = \mathcal{F}(\alpha_n \mathcal{G}(\varphi_1 * \psi_1)) = \alpha_n \varphi_1 * \psi_1 = \alpha_n \mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi.$$

**Satz 7.15 (Fourier-Plancherel-Formel)** Es seien  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \overline{\psi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi) \overline{\mathcal{F}(\psi)} dx,$$

Insbesondere gilt  $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ .

*Beweis.* Zunächst erkennt man, dass

$$\mathcal{F}(\overline{\psi})(-y) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} \overline{\psi(x)} dx = \alpha_n \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} \psi(x) dx} = \overline{\mathcal{F}(\psi)(y)}. \quad (7.13)$$

Nach Theorem 7.13 (v) ist außerdem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx &= \alpha_n^{-1} \mathcal{F}(\varphi \cdot \overline{\psi})(0) = (\mathcal{F}(\varphi) * \mathcal{F}(\overline{\psi}))(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(y) \mathcal{F}(\overline{\psi})(0-y) dy \stackrel{(7.13)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(y) \overline{\mathcal{F}(\psi)(y)} dy. \end{aligned}$$

■

**Bemerkung 7.12**  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  ist ein dichter Teilraum, siehe ÜA 11.2. Daher lässt sich die Fouriertransformation eindeutig zu einem unitären Operator  $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  fortsetzen. (Und zwar wähle man zu einer gegebenen Funktion  $f \in L^2$  eine Folge  $\varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , die gegen  $f$  in der  $L^2$ -Norm konvergiert. Da  $\mathcal{F}$  diese Norm erhält, gilt  $\|\mathcal{F}\varphi_k - \mathcal{F}\varphi_m\| = \|\varphi_k - \varphi_m\|$  und da  $(\varphi_n)$  eine Cauchy-Folge im  $L^2$  ist, ist auch  $(\mathcal{F}\varphi_k)$  eine Cauchy-Folge. Somit konvergiert letztere gegen ein  $g \in L^2$ . Wir definieren dann  $\mathcal{F}(f) = g$ .)

## 7.4.2 Der Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

**Definition 7.19** Eine *temperierte Distribution* (oder auch *langsam wachsende Distribution*) ist ein stetiges lineares Funktional  $T$  auf dem Testfunktionenraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Dabei heißt  $T$  *stetig* auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , wenn für alle Folgen  $\varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$  gilt  $T(\varphi_k) \rightarrow 0$ . Die Menge der temperierten Distributionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Für eine Folge  $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  folgt, dass  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ . Schränkt man also ein stetiges lineares Funktional auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ein auf den Raum  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , so bleibt das Funktional stetig auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Somit kann jede  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ -Distribution auch als  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ -Distribution aufgefasst werden. Die Einschränkungabbildung  $e: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $e(T) = T|_{\mathcal{D}}$  ist injektiv, denn wenn  $T(\varphi) = 0$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$ , so ist sogar  $T(\psi) = 0$  für alle  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , da  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dicht und  $T$  stetig auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist. Über diese Injektion  $e$  können wir  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  mit einem Teilraum von  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  identifizieren; wir schreiben etwas lax,  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{D}'$ .

**Lemma 7.16 (Charakterisierung der Stetigkeit von  $T$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ )** Ein lineares Funktional  $T$  auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist stetig, genau dann, wenn es nicht-negative ganze Zahlen  $k$  und  $l$  und eine positive Konstante  $C$  derart gibt, dass für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$|T(\varphi)| \leq C p_{kl}(\varphi),$$

$$\text{wobei } p_{kl}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} p_{\alpha\beta}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha \varphi(x)|.$$

**Bemerkung 7.13 (reguläre Distributionen)** (a) Es sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  oder  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt  $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

(b) Es gibt lokal integrierbare Funktionen, die *keine* reguläre temperierte Distribution  $T_f$  definieren. So ist zum Beispiel  $f(x) = e^{x^2}$  stetig auf  $\mathbb{R}$  (und damit in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ), aber  $T_f(\varphi)$  ist nicht wohldefiniert auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , denn  $T_{e^{x^2}}(e^{-x^2}) = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2} e^{-x^2} dx = +\infty$ .

(c) Wenn  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\text{supp } T$  ist kompakt, dann gilt auch  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Sei nämlich  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\eta = 1$  auf einer Umgebung des Trägers von  $T$ . Dann kann man definieren  $S(\varphi) := T(\varphi\eta)$ . Dann ist  $S$  eine temperierte Distribution, die  $T$  stetig fortsetzt.

(d) Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  messbar. Wenn ein  $C > 0$  und ein  $m \in \mathbb{N}$  derart existieren, dass

$$|f(x)| \leq C(1 + \|x\|^2)^m \quad \text{f. ü. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt  $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Die obige Abschätzung und Bemerkung 7.10 liefern

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \right| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m (1 + \|x\|^2)^{-n} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^n} |\varphi(x)| dx \\ &\leq C p_{0,2m+2n}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + \|x\|^2)^n}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.16, ist  $T_f$  eine temperierte, reguläre Distribution,  $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

### Operationen in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Addition, Multiplikation, Differentiation, Tensorprodukt werden in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  genauso definiert wie in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Man muss aber jedes Mal noch zeigen, dass dadurch ein *stetiges* Funktional auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  definiert ist. Wenn  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , dann gilt:

(a)  $D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  für alle Multiindizes  $\alpha$ .

(b) Es gilt  $a \cdot T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , falls  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit allen partiellen Ableitungen polynomial beschränkt ist, das heißt, für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  gibt es ein  $C_\alpha > 0$  und ein  $k_\alpha \geq 0$  mit  $|D^\alpha f(x)| \leq C_\alpha(1 + \|x\|)^{k_\alpha}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(c) Die lineare Transformation  $T(Ax + b) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ist ebenfalls temperiert für jede reguläre  $n \times n$ -Matrix und alle  $b \in \mathbb{R}^n$ .

(d)  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  und  $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  impliziert, dass  $T \otimes S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ .

(e) Für  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  definieren wir die Faltung

$$\begin{aligned} \psi * T(\varphi) &= (1(x) \otimes T(y))(\psi(x)\varphi(x+y)), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ &= T\left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x+y) dx\right) \end{aligned}$$

### 7.4.3 Die Fouriertransformation im Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Wir folgen unserem *Allgemeinen Prinzip* und definieren die Fouriertransformierte einer regulären Distribution  $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  vermöge  $\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}f}$ . Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  integrierbar. Dann existieren sowohl seine Fouriertransformation  $\hat{f}$  als auch die reguläre Distribution  $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Nach Fubinis Theorem gilt

$$T_{\hat{f}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \alpha_n \iint_{\mathbb{R}^{2n}} f(x) e^{-i\xi \cdot x} \varphi(\xi) d\xi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{\varphi}(x) dx = T_f(\hat{\varphi}).$$

Somit ist  $T_{\mathcal{F}f}(\varphi) = T_f(\mathcal{F}\varphi)$ . Diese Gleichung nehmen wir als Definition.

**Definition 7.20** Für  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  definieren wir

$$\mathcal{F}T(\varphi) = T(\mathcal{F}\varphi). \quad (7.14)$$

$\hat{T} = \mathcal{F}T$  heißt *Fouriertransformierte* der Distribution  $T$ .

Wegen  $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist  $\mathcal{F}T$  wohldefiniert auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Da  $\mathcal{F}$  ein stetiger linearer Operator ist und  $T$  ein stetiges lineares Funktional, ist  $\mathcal{F}T$  ebenfalls ein stetiges lineares Funktional.

**Lemma 7.17** Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ist ein stetiger, bijektiver, linearer Operator.

Sein Umkehroperator  $\mathcal{G}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ist gegeben durch  $\mathcal{G}T(\varphi) = T(\mathcal{G}\varphi)$ .

**Bemerkung 7.14** Die Eigenschaften (i) und (ii) aus Theorem 7.13 gelten auch für  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Also lautet (i) nun  $\mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|} D^\alpha(\mathcal{F}T)$ . Tatsächlich gilt für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  nach Theorem 7.13 (ii)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x^\alpha T)(\varphi) &= x^\alpha T(\mathcal{F}\varphi) = T(x^\alpha \mathcal{F}\varphi) = T((-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(D^\alpha \varphi)) \\ &= (-1)^{|\alpha|} (-i)^{|\alpha|} D^\alpha(\mathcal{F}T)(\varphi) = i^{|\alpha|} D^\alpha T(\varphi). \end{aligned}$$

**Beispiel 7.13** (a) Es sei  $a \in \mathbb{R}^n$ . Wir berechnen  $\mathcal{F}\delta_a$ . Für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist

$$\mathcal{F}\delta_a(\varphi) = \delta_a(\mathcal{F}\varphi) = (\mathcal{F}\varphi)(a) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot a} \varphi(x) dx = T_{\alpha_n e^{-ix \cdot a}}(\varphi).$$

Folglich ist die Distribution  $\mathcal{F}\delta_a$  die reguläre Distribution zur Funktion  $f(x) = \alpha_n e^{-ix \cdot a}$ . Insbesondere ist  $\mathcal{F}(\delta) = T_{\alpha_n 1}$  die konstante Funktion. Man beachte, dass

$$\mathcal{F}(\delta)(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \delta(\hat{\varphi}_-) = \delta(\mathcal{G}\varphi) = \mathcal{G}(\delta)(\varphi).$$

Daher folgt aus  $\mathcal{F}(\delta) = \alpha_n 1$  durch Invertieren  $\alpha_n^{-1} \delta = \mathcal{G}(T_1) = \mathcal{F}(T_1)$ .

Übung.  $\mathcal{G}(\delta_a) = \mathcal{F}(\delta_{-a})$ .

(b)  $n = 1, b > 0$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(H(b - |x|)) &= \alpha_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} H(b - |x|) dx \\ &= \alpha_1 \int_{-b}^b e^{-ix\xi} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(b\xi)}{\xi}. \end{aligned}$$

(c) *Die einfache und die doppelte Schicht.* Es sei  $S$  eine kompakte, reguläre, stückweise differenzierbare sich nicht überschneidende Fläche im  $\mathbb{R}^3$  und  $\varrho(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$  eine Funktion auf

$S$ . (eine Dichtefunktion oder Ladungs- oder Masseverteilung). Wir definieren eine Distribution  $\varrho \delta_S$  als skalares Oberflächenintegral

$$\varrho \delta_S(\varphi) = \iint_S \varrho(x) \varphi(x) dS.$$

Da der Träger von  $\varrho \delta_S$  die Fläche  $S$  ist, eine Fläche vom Volumenmaß 0, definiert  $\varrho \delta_S$  eine singuläre Distribution. Wir nennen sie die Distribution der *einfachen Schicht*.

Analog definiert man die Distribution der *doppelten Schicht*, welche bei Dipolen eine Rolle spielt:

$$-\frac{\partial}{\partial \vec{n}}(\varrho \delta_S)(\varphi) = \iint_S \varrho(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \vec{n}} dS,$$

wobei  $\vec{n}$  die Normalenableitung (Ableitung in Richtung des Normalenvektors auf der Fläche) bezeichnet.

Wir berechnen die Fouriertransformation der Distribution der einfachen Schicht  $\mathcal{F}(\varrho \delta_S)$  für den Fall einer Sphäre  $S_r = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r\}$  vom Radius  $r$  und der Dichte  $\varrho = 1$ . Nach Fubinis Theorem ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \delta_{S_r}(\varphi) &= \delta_{S_r(0)}(\mathcal{F} \varphi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \iint_{S_r} \left( \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \right) dS_\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \iint_{S_r} (\cos(x \cdot \xi) - \underbrace{i \sin(x \cdot \xi)}_{\text{ist 0}}) dS_\xi \right) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von sphärischen Koordinaten auf  $S_r$ , wobei  $x$  auf der  $z$ -Achse fixiert ist und  $\vartheta$  der Winkel zwischen  $x$  und  $\xi \in S_r$  ist, erhalten wir das Oberflächenelement  $dS = r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$  und  $x \cdot \xi = r \|x\| \cos \vartheta$ . Somit kann man das (innere) Oberflächenintegral berechnen zu

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos(\|x\| r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad s = \|x\| r \cos \vartheta, \quad ds = -\|x\| r \sin \vartheta d\vartheta \\ &= 2\pi \int_{\|x\| r}^{-\|x\| r} -\cos s \frac{r}{\|x\|} ds = 4\pi \frac{r}{\|x\|} \sin(\|x\| r). \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathcal{F} \delta_{S_r}(\varphi) = \frac{2r}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) \frac{\sin(r \|x\|)}{\|x\|} dx;$$

die Fouriertransformierte von  $\delta_{S_r}$ , eine reguläre Distribution zur Funktion

$$\mathcal{F} \delta_{S_r}(x) = \frac{2r}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(r \|x\|)}{\|x\|}.$$

(d) *Die Resolvente des Laplace-Operators*  $-\Delta$ . Wir betrachten den Hilbertraum  $H = L^2(\mathbb{R}^n)$  und in ihm den dichten Teilraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist der Laplace-Operator  $A\varphi = -\Delta\varphi$  definiert. Zur Erinnerung: Die Resolvente  $R_\lambda(A)$  eines linearen Operators  $A$  an der Stelle

$\lambda$  ist der beschränkte, auf ganz  $H$  definierte Operator, der die Gleichung  $R_\lambda(A)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)R_\lambda(A) = I$  erfüllt. Er ist also der inverse Operator zu  $A - \lambda I$ . Für  $f \in H$  suchen wir also ein  $u \in H$  mit  $R_\lambda(A)f = u$ . Dies ist äquivalent zum Auflösen der Gleichung  $f = (A - \lambda I)(u)$  nach  $u$ . Im Falle von  $A = -\Delta$  können wir dazu die Fouriertransformation benutzen. Nach Theorem 7.13 (ii) ist nämlich

$$-\Delta u - \lambda u = f, \quad -\mathcal{F} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u \right) - \lambda \mathcal{F} u = \mathcal{F} f,$$

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^2 (\mathcal{F} u)(\xi) - \lambda \mathcal{F} u(\xi) = (\mathcal{F} u)(\xi)(\xi^2 - \lambda) = \mathcal{F} f(\xi)$$

$$\mathcal{F} u(\xi) = \frac{\mathcal{F} f(\xi)}{\xi^2 - \lambda}$$

$$u(x) = \mathcal{G} \left( \frac{1}{\xi^2 - \lambda} \mathcal{F} f(\xi) \right) (x)$$

Folglich gilt:

$$R_\lambda(-\Delta) = \mathcal{F}^{-1} \circ \frac{1}{\xi^2 - \lambda} \circ \mathcal{F},$$

wobei in der Mitte ein Multiplikationsoperator, in diesem Falle mit der Funktion  $1/(\xi^2 - \lambda)$ , steht. Man erkennt, dass dieser Operator in  $H$  beschränkt ist, da genau dann, wenn der Multiplikationsoperator beschränkt ist, also wenn der Nenner ungleich Null ist für alle  $\xi \in \mathbb{R}$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ , so dass für das Spektrum von  $-\Delta$  gilt  $\sigma(-\Delta) \subset \mathbb{R}_+$ .

## 7.5 Anhang — Mehr zur Faltung

Da die folgende Eigenschaft später noch des öfteren gebraucht wird, wollen wir sie hier erwähnen:

**Satz 7.18** *Es seien  $T(x, t)$  und  $S(x, t)$  Distributionen in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  mit  $\text{supp } T \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  und  $\text{supp } S \subset \Gamma_+(0, 0)$ , dabei ist  $\Gamma_+(0, 0) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq at\}$  der Vorwärtslichtkegel am Ursprung. Dann existiert die Faltung  $T * S$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  und kann wie folgt geschrieben werden*

$$T * S(\varphi) = T(x, t) \otimes S(y, s) \left( \eta(t)\eta(s)\eta(as - \|y\|) \varphi(x + y, t + s) \right), \quad (7.15)$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ , wobei  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  eine Testfunktion ist mit  $\eta(t) = 1$  für  $t > -\varepsilon$  und  $\varepsilon > 0$  ist eine fixierte positive Zahl. Die Faltung  $(T * S)(x, t)$  verschwindet für  $t < 0$  und ist in beiden Komponenten stetig, das heißt,

- (a) Wenn  $T_k \rightarrow T$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  und  $\text{supp } S_k, S \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , dann gilt  $T_k * S \rightarrow T * S$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ .
- (b) Wenn  $S_k \rightarrow S$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  und  $\text{supp } S_k, S \subseteq \Gamma_+(0, 0)$ , dann  $T * S_k \rightarrow T * S$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ .

*Beweis.* Wegen  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $\eta(x) = 0$  für  $x < -\delta$ . Es sei  $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  so gegeben, dass  $\text{supp } \varphi \in U_R(0)$  für ein geeignetes  $R > 0$ . Es sei  $\eta_k(x, t, y, s)$ ,  $k \rightarrow \infty$ , eine Folge

von Testfunktionen aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$ , die im  $\mathbb{R}^{2n+2}$  gegen 1 konvergiert. Für genügend große  $k$  ist dann

$$\begin{aligned}\psi_k &:= \eta(s)\eta(t)\eta(as - \|y\|)\eta_k(x, t, y, s)\varphi(x + y, t + s) \\ &= \eta(s)\eta(t)\eta(at - \|y\|)\varphi(x + y, t + s) =: \psi.\end{aligned}\tag{7.16}$$

Wir müssen zeigen, dass  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$ . Natürlich ist  $\psi$  beliebig oft differenzierbar. Der Träger  $\text{supp } \psi$  ist enthalten in

$$\{(x, t, y, s) \mid s, t \geq -\delta, as - \|y\| \geq -\delta, \|x + y\|^2 + |r + s|^2 \leq R^2\},$$

und diese Menge ist beschränkt.

Wegen  $\eta(t) = 1$  in einer Umgebung von  $\text{supp } T$  und  $\eta(s)\eta(as - \|y\|) = 1$  in einer Umgebung von  $\text{supp } S$  gilt,  $T(x, t) = \eta(x)T(x, t)$  und  $S(y, s) = \eta(s)\eta(as - \|y\|)S(y, s)$ . Mittels (7.16) erhalten wir

$$\begin{aligned}T * S(\varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} T(x, t) \otimes S(y, s) (\eta_k(x, t, y, s)\varphi(x + y, t + s)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} T(x, t) \otimes S(y, s) (\psi_k), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2}).\end{aligned}$$

Hieraus folgt die erste Behauptung.

Wir zeigen nun, dass die rechte Seite von (7.15) ein stetiges lineares Funktional auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  definiert. Sei  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dann ist

$$\psi_k := \eta(t)\eta(s)\eta(as - \|y\|)\varphi_k(x + y, t + s) \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Somit gilt,

$$T * S(\varphi_k) = T(x, t) \otimes S(y, s) (\psi_k) \rightarrow T(x, t) \otimes S(y, s) (\psi) = T * S(\varphi), \quad k \rightarrow \infty,$$

und  $T * S$  ist stetig.

Wir zeigen, dass  $T * S$  für  $t < 0$  verschwindet. Dazu sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  mit  $\text{supp } \varphi \subseteq \mathbb{R}^n \times (-\infty, -\delta_1]$ . Wähle  $\delta > \delta_1/2$ , dann hat man

$$\eta(t)\eta(s)\eta(as - \|y\|)\varphi(x + y, t + s) = 0,$$

sodass  $T * S(\varphi) = 0$ . Die Stetigkeit der Faltung folgt aus der Stetigkeit des Tensorproduktes. ■

# Kapitel 8

## PDGI II — Die Gleichungen der Mathematischen Physik

In diesem Kapitel studieren wir ausführlich die Laplace-Gleichung und die Poisson-Gleichung, die Wellengleichung in allen drei Dimensionen und die Wärmeleitungsgleichung. Wir geben die Fundamentallösungen zu diesen drei Operatoren an und zeigen, wie man sie benutzt, um Anfangswertprobleme zu lösen.

Schließlich studieren wir Randwertprobleme für den Laplace-Operator.

Wir wiederholen die *Greenschen Formeln*: Es sei  $G$  ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$  mit glattem Rand  $\partial G$ , so dass in jedem Punkt  $y \in \partial G$  ein von Null verschiedener äußerer Normalenvektor  $\vec{n}_y$  existiert. Ferner sei  $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \int_G (u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)) dx &= \int_{\partial G} \left( u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial \vec{n}_y} - v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} \right) dS(y), \\ \int_G \Delta u(x) dx &= \int_{\partial G} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS(y). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Dabei ist  $\frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y}$  Ableitung von  $u$  in  $y \in \partial G$  in Richtung der äußeren Normalen  $\vec{n}_y$  an  $\partial G$ .

### 8.1 Fundamentallösungen

#### 8.1.1 Die Laplace-Gleichung

Mit  $\omega_n$  bezeichnen wir die Oberfläche der Einheitssphäre  $S_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ; also ist  $\omega_2 = 2\pi$  und  $\omega_3 = 4\pi$ .

**Theorem 8.1** *Die Funktion*

$$E_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \|x\|, & n = 2, \\ -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

ist in  $\mathbb{R}^n$  lokal integrierbar; die zugehörige reguläre Distribution  $\mathcal{E}_n = T_{E_n}$  erfüllt die Gleichung  $\Delta \mathcal{E}_n = \delta$  und ist somit eine Fundamentallösung des Laplace-Operators.

*Beweis. 1. Schritt.* Zunächst ist  $\Delta E_n(x) = 0$  für alle  $x \neq 0$ . In der Tat, sei  $f(r)$ ,  $r = \|x\|$  eine radialsymmetrische Funktion, so ist  $\nabla f(r) = \frac{f'(r)}{r}x$  und weiter  $\Delta f(r) = f''(r) + \frac{n-1}{r}f'(r)$ . Im Falle  $n = 2$  ist also

$$\Delta \ln r = -\frac{1}{r^2} + \frac{2-1}{r} \frac{1}{r} = 0,$$

und für  $n \geq 3$

$$\Delta r^{-n+2} = (-n+2)(-n+1)r^{-n} + \frac{n-1}{r}(-n+2)r^{-n+1} = 0.$$

*2. Schritt.* Nach Übungsaufgabe 8.1 sind  $\ln \|x\| \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$  und  $1/\|x\|^\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , falls nur  $\alpha < n$ . Insbesondere ist  $E_n$ ,  $n > 2$ , lokal integrierbar, da  $\alpha = n-2 < n$ .

*3. Schritt.* Sei  $n \geq 3$ . Wir setzen  $r = \|x\|$ . Wegen  $\frac{1}{\|x\|^{n-2}} = \frac{1}{r^{n-2}} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , ist  $E_n$  lokal integrierbar. Wegen der Stetigkeit des Lebesguemaßes gilt daher für alle  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)}{r^{n-2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \frac{\psi(x)}{r^{n-2}} dx.$$

Schreibt man zur Abkürzung  $\beta_n = -1/((n-2)\omega_n)$ , so hat man für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\Delta \mathcal{E}_n(\varphi) = \mathcal{E}_n(\Delta \varphi) = T_{E_n}(\Delta \varphi) = \beta_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta \varphi(x) dx}{r^{n-2}} = \beta_n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \frac{\Delta \varphi(x) dx}{r^{n-2}}.$$

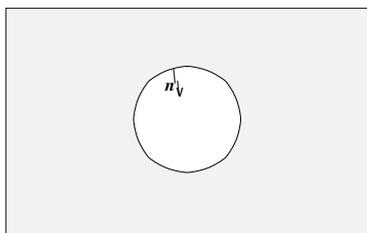
Dieses Integral auf der rechten Seite berechnen wir mittels  $v(x) = \frac{1}{r^{n-2}}$ , was eine harmonische Funktion ist für  $r \geq \varepsilon$ , also  $\Delta v = 0$ . Wendet man die Greensche Identität an, so hat man

$$\beta_n \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \frac{\Delta \varphi(x) dx}{\|x\|^{n-2}} = \beta_n \int_{\|x\| = \varepsilon} \left( \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \varphi(x) - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{1}{r^{n-2}} \right) \right) dS$$

Wir betrachten zunächst das erste Integral für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dazu beachte man, dass  $\nabla \varphi$  und damit  $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}$  auf der Sphäre beschränkt sind; etwa  $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right| \leq c$ . Also können wir abschätzen:

$$\left| \int_{\|x\| = \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \varphi(x) \frac{dS}{r^{n-2}} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\|x\| = \varepsilon} \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial r} \right| dS \leq \frac{c}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\|x\| = \varepsilon} dS = \frac{c \omega_n \varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-2}} = c \omega_n \varepsilon$$

und das konvergiert für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen 0.



Beim zweiten Integral benutzten wir, dass der äußere Normalenvektor zum Kugeläußeren  $r \geq \varepsilon$  radial in Richtung 0 zeigt,  $\vec{n} = -\frac{x}{r}$ , und damit

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} f(r) = -\frac{x}{r} \nabla f(r) = -\frac{x}{r} f'(r) \frac{x}{r} = -f'(r).$$

Insbesondere ist  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}(r^{-n+2}) = (n-2) \frac{1}{r^{n-1}}$  und wir erhalten

wegen  $-\beta_n(n-2) = \frac{1}{\omega_n}$

$$\text{zweites Integral} = -\beta_n \int_{\|x\|=\varepsilon} \varphi(x) \frac{n-2}{r^{n-1}} dS = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\|x\|=\varepsilon} \varphi(x) dS.$$

Man beachte, dass  $\omega_n \varepsilon^{n-1}$  genau das Maß (die Oberfläche) der  $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre vom Radius  $\varepsilon$  ist. Somit ist das Integral der Mittelwert von  $\varphi$  über der Sphäre vom Radius  $\varepsilon$ . Da  $\varphi$  bei 0 stetig ist, konvergiert dieser Mittelwert gegen  $\varphi(0)$ . Damit ist die Behauptung für  $n \geq 3$  gezeigt.

Der Beweis für  $n = 2$  ist analog. ■

**Folgerung 8.2** *Es sei  $\rho$  eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger.*

*Dann ist  $T_{V_n} = \mathcal{E}_n * T_\rho$  eine reguläre Distribution und es gilt  $\Delta T_{V_n} = T_f$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Insbesondere gilt, dass Flächen- und Volumenpotential (siehe Beispiel 7.10 (d))*

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \ln \|x-y\| \rho(y) dy, \quad n=2; \\ V_3(x) &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|} dy, \quad n=3. \end{aligned} \tag{8.2}$$

die Poisson-Gleichung in  $\mathcal{D}'$  erfüllen.

*Beweis.* Nach Theorem 7.11, ist  $T_S = \mathcal{E} * T_\rho$  eine Lösung von  $L[T_S] = T_\rho$  sofern  $\mathcal{E}$  eine Fundamentallösung von  $L$  ist. Setzt man die Fundamentallösungen des Laplace-Operators für  $n = 2$  und  $n = 3$  ein und benutzt, dass  $\rho$  einen kompakten Träger hat, dann existieren die Potentiale als Faltungen und sind die eindeutig bestimmten Lösungen der Poisson-Gleichung. ■

**Bemerkung 8.1** (a) Die angegebenen Lösungen (8.2) sind sogar klassische Lösungen, denn  $V_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , und man erhält  $\Delta V_n(x) = \rho(x)$ .

(b) Die Funktion  $G(x, y) = \mathcal{E}_n(x-y)$  heißt *Greensche Funktion* des Laplace-Operators auf dem  $\mathbb{R}^n$ .

### 8.1.2 Die Wärmeleitungsgleichung

**Satz 8.3** *Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $a > 0$ . Die Funktion*

$$F(x, t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} H(t) e^{-\frac{\|x\|^2}{4a^2 t}}$$

*definiert eine reguläre Distribution  $\mathcal{E} = T_F$ , die Fundamentallösung des Wärme-Operators  $L[u] = u_t - a^2 \Delta u$ , das heißt*

$$\mathcal{E}_t - a^2 \Delta_x \mathcal{E} = \delta(x, t). \tag{8.3}$$

*Beweis. Schritt 1.* Die Funktion  $F(x, t)$  ist nach Übungsaufgabe 11.4 lokal integrierbar auf  $\mathbb{R}^{n+1}$ , denn

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x, t) dx = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} dx = \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi_k^2} d\xi_k \right) = 1. \quad (8.4)$$

Somit ist  $F(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  für jedes fixierte  $t \in \mathbb{R}$ . Außerdem ist für alle kompakten Teilmengen  $K \subset \mathbb{R}_+$  das Integral  $\int_K \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} dt < \infty$  endlich. Hieraus folgt  $F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ .

*Schritt 2.* Es gilt  $F \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$  und daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \left( \frac{x^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t} \right) F, \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} &= -\frac{x_i}{2a^2 t} F; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \left( \frac{x_i^2}{4a^4 t^2} - \frac{1}{2a^2 t} \right) F, \\ \frac{\partial F}{\partial t} - a^2 \Delta F &= 0, \end{aligned} \quad (8.5)$$

erfüllt  $F$  die klassische Wärmeleitungsgleichung für  $t > 0$ ; vgl. Übungsaufgabe 9.2.

*Schritt 3.* Wir zeigen  $L[T_F] = \delta$  mittels Fouriertransformation  $\mathcal{F}_x$  von  $F(x, t)$  bezüglich der Ortsvariablen  $x \in \mathbb{R}^n$ . Sei also  $E(\xi, t) = (\mathcal{F}_x F)(\xi, t)$ . Wendet man  $\mathcal{F}_x$  auf die Gleichung (8.3) an, so erhält man eine gewöhnliche DGL erster Ordnung in  $t$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} E(\xi, t) + a^2 \xi^2 E(\xi, t) = \mathcal{F}_x(\delta(x, t)) = \alpha_n 1(\xi) \delta(t).$$

Nach Beispiel 7.11 hat  $u' + bu = \delta$  die Fundamentallösung  $u(t) = H(t)e^{-bt}$ ; also ist

$$E(\xi, t) = \alpha_n H(t) e^{-a^2 \xi^2 t}$$

eine Lösung der obigen Gleichung. Wendet man hierauf die inverse Fouriertransformation (bezüglich der Variablen  $\xi$ ) an, so erhält man nach Beispiel 7.12,

$$\mathcal{F}^{-1} \left( e^{-\frac{\xi^2}{2c^2}} \right) = c^n e^{-\frac{c^2 x^2}{2}},$$

wobei in unserem Falle  $\frac{1}{2c^2} = a^2 t$  bzw.  $c = \frac{1}{\sqrt{2a^2 t}}$ . Folglich ist

$$\mathcal{E}(x, t) = H(t) \alpha_n \mathcal{F}^{-1} \left( e^{-a^2 \xi^2 t} \right) = \frac{H(t)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{(2a^2 t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 2a^2 t}} = \frac{H(t)}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \quad \blacksquare$$

**Folgerung 8.4** *Es sei  $f(x, t)$  eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  mit kompakten Träger. Dann heißt die Funktion*

$$V(x, t) = H(t) \frac{1}{(4a^2 \pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4a^2(t-s)}}}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} f(y, s) dy ds$$

Wärmepotential zur Verteilung  $f$ .  $V(x, t)$  definiert eine reguläre Distribution aus  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  und  $T_V$  ist eine Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung  $u_t - a^2 \Delta u = f$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ .

*Beweis.* Dies folgt aus Theorem 7.11. unter Beachtung von  $V = F * f$ . ■

### 8.1.3 Die Wellengleichung

Wir werden die Fundamentallösungen zu den Wellengleichungen in den Raumdimensionen  $n = 1, 2, 3$  bestimmen. Im Falle  $n = 3$  benutzen wir wie bei der Wärme die Fouriertransformation  $\mathcal{F}_x$  und deren inverse Transformation. Für die Dimensionen  $n = 2$  und  $n = 1$  benutzen wir die *Abstiegsmethode*.

#### (a) Der Fall $n = 3$

**Satz 8.5** *Die Distribution*

$$\mathcal{E}(x, t) = \delta_{S_{at}} \otimes \frac{1}{4\pi a^2} T_{\frac{H(t)}{t}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$$

ist eine Fundamentallösung des Wellenoperators  $\square_a u = u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3})$ , wobei  $\delta_{S_{at}}$  die Distribution der einfachen Schicht zur Sphäre um 0 mit dem Radius  $at$  bezeichnet.

*Beweis.* Wie bei der „Wärme“ setzten wir  $E(\xi, t) = \mathcal{F}_x \mathcal{E}(\xi, t)$  die Fouriertransformation bezügl. der Ortsvariablen. Dann erfüllt  $E(\xi, t)$  die gDGI zweiter Ordnung in  $t$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E + a^2 \xi^2 E = \alpha_3 1(\xi) \delta(t)$$

Nach Beispiel 7.11 hat  $u'' + a^2 u = \delta$ ,  $a > 0$  eine Fundamentallösung  $u(t) = H(t) \frac{\sin at}{a}$ . Folglich ist

$$E(\xi, t) = \alpha_3 H(t) \frac{\sin(a \|\xi\| t)}{a \|\xi\|},$$

wobei  $\xi$  wieder als Parameter agiert. Wir wenden nun die inverse Fouriertransformation bezüglich  $\xi$  an und erhalten nach Beispiel 7.13 (b), die Distribution der einfachen Schicht:

$$\mathcal{F} \delta_{S_{at}}(\xi) = \frac{2at}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(at \|\xi\|)}{\|\xi\|}.$$

Folglich ist

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2at} H(t) \delta_{S_{at}}(x) \frac{1}{a} = \frac{1}{4\pi a^2 t} H(t) \delta_{S_{at}}(x)$$

eine Fundamentallösung von  $\square_a$ . ■

Wir wollen die Wirkung  $\mathcal{E}_3(\varphi(x, t))$  auf einer Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  berechnen. Unter Verwendung von  $dx_1 dx_2 dx_3 = dS_r dr$ , wobei  $x = (x_1, x_2, x_3)$  und  $r = \|x\|$  und mit der Skalierung

$r = at$ ,  $dr = a dt$  und  $dS$  ist das skalare Oberflächenelement der Sphäre  $S_r(0)$ , erhalten wir

$$\mathcal{E}_3(\varphi) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \iint_{S_{at}} \varphi(x, t) dS dt \quad (8.6)$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{a}{r} \iint_{S_r} \varphi\left(x, \frac{r}{a}\right) dS \frac{dr}{a}$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(x, \frac{\|x\|}{a}\right)}{\|x\|} dx. \quad (8.7)$$

### (b) Die Dimensionen $n = 2$ und $n = 1$

Wir konstruieren die Fundamentallösung  $\mathcal{E}_2(x, t)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ , mittels Abstiegsmethode.

**Lemma 8.6** Eine Fundamentallösung  $\mathcal{E}_2$  des 2-dimensionalen Wellenoperators  $\square_{a,2}$  ist für  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  gegeben über

$$\mathcal{E}_2(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_3(x_1, x_2, x_3, t) (\varphi(x_1, x_2, t) \eta_k(x_3)),$$

wobei  $\mathcal{E}_3$  die obige Fundamentallösung von  $\square_{a,3}$  ist und  $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  eine Folge von Testfunktionen ist, die für  $k \rightarrow \infty$  gegen 1 konvergiert.

Vereinfacht ausgedrückt ist also  $\mathcal{E}_2(\varphi) = \mathcal{E}_3(\varphi \otimes 1)$ , wobei die rechte Seite eben keine Testfunktion in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  ist, da i. a.  $\text{supp } \varphi \times \mathbb{R}$  unbeschränkt ist. Daher die „Abschneideoperation“.

*Beweis.* Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ . Man beachte, dass  $\eta_k'' \Rightarrow 0$  gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$  für  $k \rightarrow \infty$ . Also ist

$$\begin{aligned} \square_{a,2} \mathcal{E}_2(\varphi) &= \mathcal{E}_2(\square_{a,2} \varphi) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_3(\square_{a,2}(\varphi(x_1, x_2, t) \eta_k(x_3))) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_3(\square_{a,2} \varphi(x_1, x_2, t) \cdot \eta_k(x_3) + \varphi \cdot \eta_k''(x_3)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_3(\square_{a,3}(\varphi(x_1, x_2, t) \eta_k(x_3))) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \square_{a,3} \mathcal{E}_3(\varphi \otimes \eta_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \delta(x, t) (\varphi(x_1, x_2, t) \eta_k(x_3)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(0, 0, 0) \eta_k(0) \\ &= \varphi(0, 0, 0) = \delta(x_1, x_2, t) (\varphi(x_1, x_2, t)). \end{aligned}$$

In der dritten Zeile benutzten wir, dass  $\Delta_{x_1, x_2, x_3}(\varphi(x_1, x_2, t) \cdot \eta(x_3)) = \Delta_{x_1, x_2} \varphi(x_1, x_2, t) \eta + \varphi \eta''(x_3)$ . ■

**Satz 8.7** (a) Für  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  und  $t \in \mathbb{R}$  ist die zu

$$\mathcal{E}_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{H(at - \|x\|)}{\sqrt{a^2 t^2 - x^2}} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 - x^2}}, & at > \|x\|, \\ 0, & at \leq \|x\| \end{cases}$$

gehörige reguläre Distribution auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  eine Fundamentallösung des zweidimensionalen Wellenoperators.

(b) Die zu

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} H(at - |x|) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < at, \\ 0, & |x| \geq at \end{cases}$$

gehörige reguläre Distribution auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  ist eine Fundamentallösung des eindimensionalen Wellenoperators.

*Beweis.* Nach dem obigen Lemma ist

$$\mathcal{E}_2(\varphi(x_1, x_2, t)) = \mathcal{E}_3(\varphi(x_1, x_2, t)1(x_3)) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \iint_{S_{at}} \varphi(x_1, x_2, t) dS dt.$$

Wir berechnen das skalare Oberflächenelement der Sphäre vom Radius  $at$  um 0 in den Parametern  $x_1, x_2$ . Die Sphäre ist dann die Vereinigung der oberen und unteren Halbsphäre; beides sind Graphen von Funktionen und zwar von  $x_3 = f(x_1, x_2) = +\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}$  und  $x_3 = -\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}$ . Nach der Formel für das Oberflächenelement ist  $dS = \sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2} dx_1 dx_2$ . Im Falle der oberen Halbsphäre ist daher

$$dS_{x_1, x_2} = \frac{at dx_1 dx_2}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}}$$

Die Integration über obere und untere Halbsphäre liefert den Faktor 2,

$$\begin{aligned} &= 2 \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq a^2 t^2} \frac{at \varphi(x_1, x_2, t)}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_1 dx_2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty \iint_{\|x\| \leq at} \frac{\varphi(x_1, x_2, t)}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_1 dx_2 dt. \end{aligned}$$

Folglich ist  $\mathcal{E}_2(x, t)$  die reguläre Distribution der oben angegebenen Gestalt. Man kann auch direkt zeigen, dass  $\mathcal{E}_2 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ . In der Tat ist  $\iint_{\mathbb{R}^2 \times [-R, R]} \mathcal{E}_2(x_1, x_2, t) dx dt < \infty$  für alle  $R > 0$ .

(b) Dies wurde bereits in Übungsaufgabe 9.2 gezeigt.

Wir können erneut die Abstiegs Methode benutzen. Dazu sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Wegen  $\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{E}_2(x_1, x_2, t)| dx_2 < \infty$  definiert  $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_2(x_1, x_2, t) dx_2$  ebenfalls eine lokal integrierbare Funktion auf  $\mathbb{R}^2$ . Aus Lemma 8.6 folgt dann

$$\mathcal{E}_1(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_2(x_1, x_2, t) (\varphi(x_1, t) \eta_k(x_2)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}_2(x_1, x_2, t) \eta_k(x_2) \varphi(x_1, t) dx_1 dx_2 dt.$$

Folglich ist auch die Fundamentallösung  $\mathcal{E}_1$  eine reguläre Distribution mit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(x_1, t) &= \int_{-\infty}^\infty \mathcal{E}_2(x_1, x_2, t) dx_2 = \frac{1}{2\pi a} \int_{\mathbb{R}} \frac{H(at - \sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2})}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_2 \\ &= \frac{H(a^2 t^2 - x_1^2)}{2\pi a} \int_{-b}^b \frac{dx_2}{\sqrt{b^2 - x_2^2}} = \frac{1}{2a} H(at - |x_1|). \end{aligned}$$



Der direkte Beweis ist zu finden in [Wla72, II. §6.5, Beispiel g)].

## 8.2 Cauchy-Probleme

in diesem Abschnitt studieren wir klassische und verallgemeinerte Cauchy-Probleme zu „Wärme“ und „Welle“.

### 8.2.1 Motivation

Zur Erläuterung des Vorgehens schauen wir uns ein AWP bei einer gewöhnlichen, linearen DGI zweiter Ordnung an.

Wir betrachten das Cauchy-Problem

$$u''(t) + a^2 u(t) = f(t), \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u'|_{t=0} = u_1, \quad (8.8)$$

wobei  $f \in C(\mathbb{R}_+)$ . Zunächst setzen wir die Funktionen  $u(t)$  (die Lösung) als auch  $f(t)$  durch 0 auf die negative Zeitachse fort, also für  $t < 0$ . Diese neuen Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}$  bezeichnen wir mit  $\tilde{u}$  bzw.  $\tilde{f}$ . Da  $\tilde{u}$  bei 0 einen Sprung der Höhe  $u_0$  hat, gilt nach Beispiel 7.7,  $T'_{\tilde{u}} = T_{u'} + u_0 \delta(t)$ . Analog hat auch  $u'(t)$  bei 0 einen Sprung der Höhe  $u_1$ , sodass  $T''_{\tilde{u}} = T_{u''} + u_0 \delta'(t) + u_1 \delta(t)$ . Folglich erfüllt  $T_{\tilde{u}}$  auf  $\mathbb{R}$  die Differentialgleichung

$$T''_{\tilde{u}} + a^2 T_{\tilde{u}} = T_{\tilde{f}} + u_0 \delta' + u_1 \delta. \quad (8.9)$$

Wir konstruieren die Lösung  $\tilde{u}$ . Da die Fundamentallösung des Operators zu  $E(t) = H(t) \sin at/a$  gehört und da die rechte Seite der Gleichung positiven Träger hat, existiert die Faltung und ist gleich

$$T_{\tilde{u}} = \mathcal{E} * (T_{\tilde{f}} + u_0 \delta' + u_1 \delta) = \mathcal{E} * T_{\tilde{f}} + u_0 \mathcal{E}' + u_1 \mathcal{E}.$$

Folglich ist die rechte Seite eine reguläre Distribution  $T_{\tilde{u}}$  und für  $t > 0$  gilt:

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(\tau) \sin a(t - \tau) d\tau + u_0 E'(t) + u_1 E(t).$$

Da für  $t > 0$  die Funktion  $\tilde{u}$  die Gleichung (8.9) erfüllt und da die Lösung des Cauchy-Problems eindeutig ist, liefert die obige Formel die klassische Lösung des AWP für  $t > 0$ , also

$$u(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(\tau) \sin a(t - \tau) d\tau + u_0 \cos at + u_1 \frac{\sin at}{a}.$$

### 8.2.2 Die Wellengleichung

#### (a) Klassische und verallgemeinerte Lösungen des Cauchy-Problems – Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität

**Definition 8.1** (a) Das Problem

$$\square_a u = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (8.10)$$

$$u|_{t=0+} = u_0(x), \quad (8.11)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0+} = u_1(x), \quad (8.12)$$

mit

$$f \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+), \quad u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in C(\mathbb{R}^n).$$

heißt *klassisches Anfangswertproblem* (kurz kAWP) für die Wellengleichung.

Eine Funktion  $u(x, t)$  heißt *klassische Lösung* des kAWP, falls

$$u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+),$$

und  $u$  erfüllt die Wellengleichung (8.10) für  $t > 0$  sowie die AB (8.11) und (8.12) für  $t \rightarrow 0+0$ .

(b) Das Problem

$$\square_a U = F + U_0(x) \otimes \delta'(t) + U_1(x) \otimes \delta(t)$$

mit  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $U_0, U_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\text{supp } F \subset \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$  heißt *verallgemeinertes Anfangswertproblem* (kurz vAWP). Eine Distribution  $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  mit  $\text{supp } U \subset \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ , die die obige Gleichung erfüllt heißt *verallgemeinerte Lösung* des vAWP.

**Satz 8.8** (a) Wenn  $u(x, t)$  eine klassische Lösung des kAWP ist zu  $f$ ,  $u_0$  und  $u_1$ . Dann ist die reguläre Distribution  $T_u$  eine Lösung des vAWP mit der rechten Seite  $T_f + T_{u_0} \otimes \delta'(t) + T_{u_1} \otimes \delta(t)$  wenn man sich  $f(x, t)$  und  $u(x, t)$  durch 0 fortgesetzt denkt auf das Gebiet  $\{(x, t) \mid (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t < 0\}$ .

(b) Ist umgekehrt  $U$  eine Lösung des vAWP, und sind sie Distributionen  $F = T_f$ ,  $U_0 = T_{u_0}$ ,  $U_1 = T_{u_1}$  und  $U = T_u$  regulär und erfüllen gewisse Differenzierbarkeitsbedingungen (Regularität), dann ist  $u(x, t)$  eine Lösung des kAWP

**Beweis.** (b) Wenn  $U$  eine Lösung des vAWP ist und  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  eine Testfunktion. Dann ist nach Definition des Tensorproduktes und der Ableitung

$$\begin{aligned} U_{tt} - a^2 \Delta U (\varphi) &= F(\varphi) + U_0 \otimes \delta'(\varphi) + U_1 \otimes \delta(\varphi) \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) \varphi(x, t) dx dt - \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Wendet man darauf zweimal die partielle Integration bezügl.  $t$  an, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u \varphi_{tt} dt &= u \varphi_t \Big|_0^\infty - \int_0^\infty u_t \varphi_t dt \\ &= -u(x, 0) \varphi_t(x, 0) - u_t \varphi \Big|_0^\infty + \int_0^\infty u_{tt} \varphi dt \\ &= -u(x, 0) \varphi_t(x, 0) + u_t(x, 0) \varphi(x, 0) + \int_0^\infty u_{tt} \varphi dt. \end{aligned}$$

Da  $\mathbb{R}^n$  keinen Rand hat und  $\varphi$  hat kompakten Träger, liefert die partielle Integration bei den Ortsvariablen keinen Randterm.

Folglich erhalten wir wegen der obigen Formel und wegen  $\iint u \Delta \varphi dt dx = \iint \Delta u \varphi dt dx$ , für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  mit  $\text{supp } \varphi$  in  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  und mit  $\varphi(x, 0) = \varphi_t(x, 0) = 0$

$$\begin{aligned} (U_{tt} - a^2 \Delta U)(\varphi) &= U(\varphi_{tt} - a^2 \Delta \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty u(x, t) (\varphi_{tt} - a^2 \Delta \varphi) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (u_{tt} - a^2 \Delta u) \varphi(x, t) dx dt - \int_{\mathbb{R}^n} (u(x, 0) \varphi_t(x, 0) - u_t(x, 0) \varphi(x, 0)) dx. \quad (8.14) \end{aligned}$$

Aus (8.13) und (8.14) folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (f(x, t) - u_{tt} + a^2 \Delta u) \varphi(x, t) dt dx = 0.$$

Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, Lemma 7.3 (Du Bois Reymond) folgt, dass  $u_{tt} - a^2 \Delta u = f$  auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ . Setzt man dies ein in (8.13) und (8.14), so hat man

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - u(x, 0)) \varphi_t(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}^n} (u_1(x) - u_t(x, 0)) \varphi(x, 0) dx = 0.$$

Wenn wir  $\varphi(x, t) = \psi(x) \eta(t)$  setzten mit  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  und  $\eta(t) = 1$  ist konstant in einer Umgebung von 0, dann ist  $\varphi_t(x, 0) = 0$  und daher

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_1(x) - u_t(x, 0)) \psi(x) dx = 0, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Mehr noch,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - u(x, 0)) \psi(x) dx = 0, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

wenn wir setzten:  $\varphi(x, t) = t \eta(t) \psi(x)$ . Erneut folgt aus Lemma 7.3

$$u_0(x) = u(x, 0), \quad u_1(x) = u_t(x, 0)$$

und  $u(x, t)$  ist eine Lösung des kAWP.

(a) Ist umgekehrt  $u(x, t)$  eine klassische Lösung des kAWP, so erfüllt die reguläre Distribution

$$U = T_{H(t)u(x,t)}.$$

die Gleichung (8.14). Vergleicht man das mit (8.13), so sieht man, dass

$$U_{tt} - a^2 \Delta U = F + U_0 \otimes \delta' + U_1 \otimes \delta,$$

wobei  $F(x, t) = T_{H(t)f(x,t)}$ ,  $U_0(x) = T_{u(x,0)}$  und  $U_1(x) = T_{u_t(x,0)}$ . ■

**Folgerung 8.9** Angenommen,  $F$ ,  $U_0$  und  $U_1$  sind die Daten eines vAWP. Dann existiert genau eine Lösung  $U$  des vAWP. Man kann sie in folgender Form aufschreiben:

$$U = V + V^{(0)} + V^{(1)}.$$

Dabei sind

$$V = \mathcal{E}_n * F, \quad V^{(1)} = \mathcal{E}_n *_{x} U_1, \quad V^{(0)} = \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial t} *_{x} U_0,$$

$\mathcal{E}_n$  ist eine Fundamentallösung des  $n$ -dimensionalen Wellenoperators  $\square_{a,n}$ . Ferner bezeichnet  $\mathcal{E}_n *_{x} U_1 := \mathcal{E}_n * (U_1(x) \otimes \delta(t))$  die Faltung bezüglich der Ortsvariablen  $x$ . Die Lösung  $U$  hängt stetig von  $F$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , von  $U_0$  und  $U_1$  ab.

**Beweis.** Die Träger der Distributionen  $U_0 \otimes \delta'$  und  $U_1 \otimes \delta$  sind in der Hyperebene  $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t = 0\}$  enthalten. Also ist der Träger der Distribution  $F + U_0 \otimes \delta' + U_1 \otimes \delta$  im Halbraum  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  enthalten.

Aus Satz 7.18 folgt, dass die Faltung

$$U = \mathcal{E}_n * (F + U_0 \otimes \delta' + U_1 \otimes \delta)$$

existiert und einen Träger im positiven Halbraum  $t \geq 0$  besitzt. Aus Theorem 7.11 folgt, dass  $U$  eine Lösung des vAWP für die Wellengleichung ist. Umgekehrt hat jede Lösung des verallgemeinerten AWP einen Träger in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  und somit, existiert nach Satz 7.18 die Faltung mit  $\mathcal{E}_n$ . Nach Theorem 7.11 ist diese Lösung  $U$  eindeutig.

Angenommen  $U_k \rightarrow U_1$  für  $k \rightarrow \infty$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ , dann gilt  $\mathcal{E}_n * U_k \rightarrow \mathcal{E}_n * U_1$  wegen der Stetigkeit der Faltung  $\mathcal{D}'$  (siehe Satz 7.18). ■

### (b) Explizite Lösungsformeln im Falle $n = 1, 2, 3$

Wir wollen die obigen Formeln von Folgerung 8.9 explizit aufschreiben, d. h., wir wollen die obigen Faltungen berechnen um die Potentiale  $V$ ,  $V^{(0)}$ , and  $V^{(1)}$  zu erhalten.

**Satz 8.10** Es sei  $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ ,  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^n)$  und  $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^n)$  für  $n = 2, 3$ ; es sei  $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$  und  $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$  für  $n = 1$ .

Dann existiert eine eindeutig bestimmte klassische Lösung des kAWP. Diese ist im Falle  $n = 3$  gegeben durch die Kirchhoffsche Wellenformel:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \left( \iiint_{U_{at}(x)} \frac{f(y, t - \frac{\|x-y\|}{a})}{\|x-y\|} dy + \frac{1}{t} \iint_{S_{at}(x)} u_1(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \iint_{S_{at}(x)} u_0(y) dS_y \right) \right). \quad (8.15)$$

Der erste Term  $V(x, t)$  heißt retardiertes Potential.

Im Falle  $n = 2$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Formel

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \iint_{U_{a(t-s)}(x)} \frac{f(y, s) dy ds}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - \|x-y\|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \iint_{U_{at}(x)} \frac{u_1(y) dy}{\sqrt{a^2 t^2 - \|x-y\|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{U_{at}(x)} \frac{u_0(y) dy}{\sqrt{a^2 t^2 - \|x-y\|^2}}. \quad (8.16)$$

Im Falle  $n = 1$  ist die Lösung gegeben durch die d'Alembertsche Formel

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y, s) dy ds + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy + \frac{1}{2} (u_0(x+at) + u_0(x-at)). \quad (8.17)$$

Die Lösung  $u(x, t)$  hängt im folgenden Sinne stetig von  $u_0$ ,  $u_1$  und  $f$  ab: Wenn

$$|f - \tilde{f}| < \varepsilon, \quad |u_0 - \tilde{u}_0| < \varepsilon_0, \quad |u_1 - \tilde{u}_1| < \varepsilon_1, \quad \|\text{grad}(u_0 - \tilde{u}_0)\| < \varepsilon'_0$$

(letzteres nur für  $n = 3$  und  $n = 2$ ), dann erfüllen die entsprechenden Lösungen  $u(x, t)$  und  $\tilde{u}(x, t)$  im Streifen  $0 \leq t \leq T$  die Ungleichung

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| < \frac{1}{2} T^2 \varepsilon + T \varepsilon_1 + \varepsilon_0 + (a T \varepsilon'_0),$$

wobei im Falle  $n = 1$  der letzte Term entfällt.

*Beweis.* (Idee) Wir zeigen die Kirchhoffsche Wellenformel. (a) Das Potential zu  $f$ .

Nach Satz 7.18 aus Anhang zu Kapitel VII, existiert die Faltung  $\mathcal{E}_3 * f$ . In [Wla72, p. 153] wurde gezeigt, dass für eine lokal-integrierbare Funktion  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$  mit Träger in  $\text{supp } f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  die Funktion  $\mathcal{E}_n * T_f$  erneut lokal-integrierbar ist.

Formal kann man die Faltung so aufschreiben:

$$(\mathcal{E}_3 * f)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{E}_3(y, s) f(x-y, t-s) dy ds = \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{E}_3(x-y, t-s) f(y, s) dy ds,$$

wobei das Integral zu lesen ist als die Auswertung der Fundamentallösung  $\mathcal{E}_3(y, s)$  auf der verschobenen Funktion  $f(x-y, t-s)$ . Da  $f$  einen Träger für  $t \geq 0$  hat, genügt es, auch nur  $s > 0$  und  $t-s > 0$  zu betrachten, sodass  $0 < s < t$ . Damit liefert Formel (8.6) Folgendes:

$$\mathcal{E}_3 * f(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{s} \iint_{S_{as}} f(x-y, t-s) dS(y) ds$$

Mit  $r = as$ ,  $dr = a ds$  erhalten wir

$$V(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \iint_{S_r} \frac{1}{r} f\left(x-y, t-\frac{r}{a}\right) dS(y) dr.$$

Unter Verwendung von  $dy_1 dy_2 dy_3 = dr dS$  und  $\|y\| = r = as$  haben wir außerdem

$$V(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{U_{at(0)}} \frac{f\left(x - y, t - \frac{\|y\|}{a}\right)}{\|y\|} dy_1 dy_2 dy_3.$$

Die Verschiebung  $z = x - y$ ,  $dz_1 dz_2 dz_3 = dy_1 dy_2 dy_3$  liefert schließlich

$$V(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{U_{at(x)}} \frac{f\left(z, t - \frac{\|x-z\|}{a}\right)}{\|x-z\|} dz.$$

Dies ist das retardierte (verzögerte) Potential aus der Kirchhoffschen Wellenformel.

(b) Wir berechnen  $V^{(1)}(x, t)$ . Nach Definition ist

$$V^{(1)} = \mathcal{E}_3 * (u_1 \otimes \delta) = \mathcal{E}_3 *_{x} u_1.$$

Formal ist das,

$$\begin{aligned} V^{(1)}(x, t) &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_{S_{at}}(y) u_1(x - y) dy = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}} u_1(x - y) dS(y) \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}(x)} u_1(y) dS(y). \end{aligned}$$

(c) Wegen  $(D^\alpha S) * T = D^\alpha(S * T)$ , und wegen Bemerkung 7.9 (b) gilt

$$\mathcal{E}_3 * (u_0 \otimes \delta') = \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}_3 *_{x} u_0);$$

und dies liefert sofort den letzten Term wegen (b). ■

**Bemerkung 8.2** (a) Die starken Differenzierbarkeitsbedingungen an  $f, u_0, u_1$  sind notwendig für  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$  und für die Stabilität.

(b) Satz 8.10 und Korollar 8.9 zeigen, dass das vAWP der Wellengleichung ein korrekt gestelltes Problem ist — Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität sind gegeben.

### 8.2.3 Die Wärmeleitungsgleichung

In völliger Analogie zur Wellengleichung definiert man auch hier die Begriffe des klassischen Anfangswertproblems — nur *eine* Anfangsbedingung wird gefordert, da nur eine Zeitableitung auftritt, klassische Lösung, verallgemeinertes Anfangswertproblem und verallgemeinerte Lösung.

Nach Übungsaufgabe 11.4 gilt für die Fundamentallösung des Wärmeoperators  $E(x, t) = \frac{H(t)}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4a^2 t}}$ .

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) dx = 1,$$

$$E(x, t) \longrightarrow \delta(x), \quad \text{für } t \rightarrow 0+.$$

Die Fundamentallösung beschreibt die zeitliche und räumliche Entwicklung der Wärmeverteilung ausgehend von einer punktförmigen Wärmequelle im Ursprung  $(0, 0)$ . Da  $E(x, t) > 0$  für alle  $t > 0$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , heißt das, dass sich die Wärme mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Das widerspricht aber unserer Erfahrung. Für *kleine* Distanzen liefert die Wärmeleitungsgleichung jedoch akzeptable Ergebnisse. Für große Distanzen muss man die sogenannte *Transportgleichung* benutzen. Wir tragen nur die Ergebnisse ohne Beweise zusammen.

**Satz 8.11** (a) Es sei  $u(x, t)$  eine klassische Lösung des kAWP zu den Daten  $f$  und  $u_0$ . Dann ist die reguläre Distribution  $T_{\tilde{u}}$  eine Lösung des vAWP mit der rechten Seite  $T_{\tilde{f}} + T_{u_0} \otimes \delta$ , wobei  $f(x, t)$  und  $u(x, t)$  durch 0 fortgesetzt sind zu  $\tilde{f}(x, t)$  und  $\tilde{u}(x, t)$  auf den Bereich  $t < 0$ .  
 (b) Ist umgekehrt  $U$  eine Lösung des vAWP und sind  $F = T_f$ ,  $U_0 = T_{u_0}$ , and  $U = T_u$  regulär und hinreichen oft differenzierbar und  $\text{supp } f, \text{supp } u \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ , dann ist  $u$  eine Lösung des kAWP.

**Satz 8.12** Es seien  $F$  und  $U_0$  die Daten des vAWP. Außerdem mögen  $F$  und  $U_0$  beide kompakten Träger haben.  
 Dann existiert eine Lösung  $U$  des vAWP und kann als Summe von zwei Potentialen geschrieben werden:

$$U = V + V^{(0)}.$$

Dabei ist

$$V = \mathcal{E} * F, \quad V^{(0)} = \mathcal{E} *_x U_0.$$

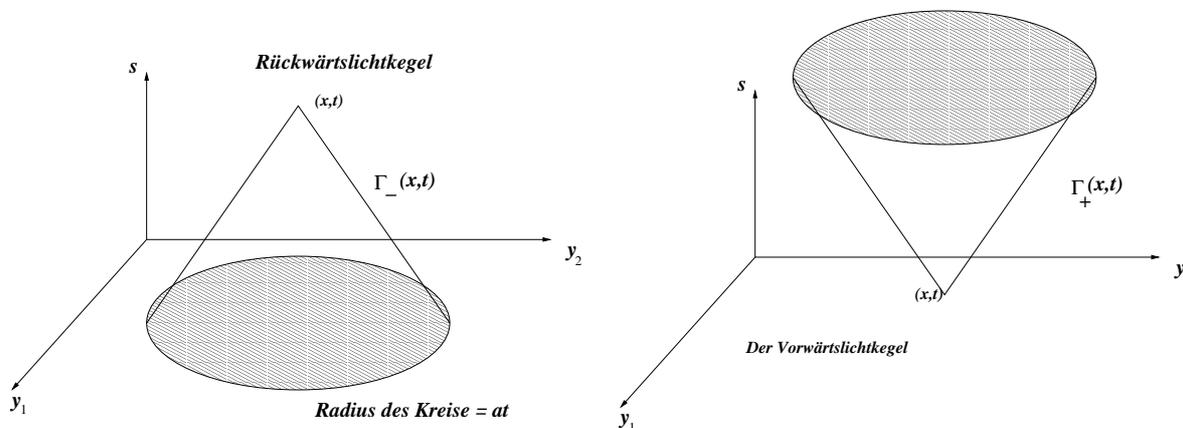
$$V(x, t) = H(t) \frac{1}{(4a^2 \pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4a^2(t-s)}}}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} f(y, s) dy ds$$

$$V^{(0)}(x, t) = \mathcal{E} * T_{u_0} \otimes \delta = \frac{H(t)}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4a^2 t}} dy$$

Die Lösung  $U$  hängt stetig von  $F$  und  $U_0$  ab.

**Bemerkung 8.3** Im Gegensatz zur Wellengleichung haben wir hier keine Eindeutigkeit der Lösung. Es zeigt sich, dass das vAWP der Wärmeleitung keine eindeutige Lösung besitzt. A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type, hat ein Beispiel einer Distribution  $U \neq 0$  angegeben, die Lösung des vAWP ist zu  $F = 0$  und  $U_0 = 0$ . Sind jedoch die Anfangsdaten reguläre Distributionen und fordern wir zusätzlich Wachstumsbedingungen an  $u$  für  $t \rightarrow \infty$ , so kann man auch die Eindeutigkeit sichern.

### 8.2.4 Physikalische Interpretation der Ergebnisse



Wir definieren zwei Kegel in  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Gamma_-(x, t) = \{(y, s) \mid \|x - y\| < a(t - s)\}, \quad s < t,$$

$$\Gamma_+(x, t) = \{(y, s) \mid \|x - y\| < a(s - t)\}, \quad s > t,$$

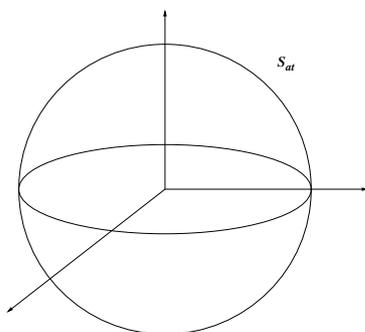
die wir *Abhängigkeitsbereich* (oder Rückwärtslichtkegel) bzw. *Einflussbereich* (Vorwärtslichtkegel) nennen. Man beachte, dass deren Ränder  $\partial \Gamma_+$  and  $\partial \Gamma_-$  die charakteristischen Flächen der Wellengleichung sind.

#### (a) Wellenausbreitung im $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten die Fundamentallösung

$$\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \delta_{S_{at}} \otimes T_{\frac{H(t)}{t}}$$

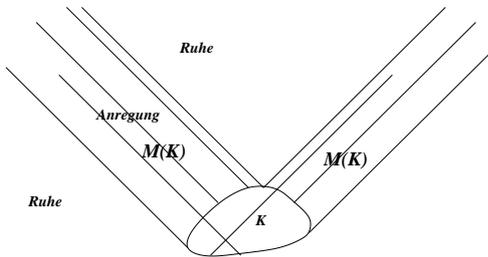
der 3-dimensionalen Wellengleichung



Die Störung ist auf der Kugeloberfläche vom Radius  $at$

Dies zeigt, dass eine punktförmige Anregung im Ursprung  $(x, t) = (0, 0)$  zur Zeit  $t > 0$  eine Wirkung hat, die vollständig auf der Sphäre vom Radius  $at$  um 0 liegt. Diese Anregung breitet sich als Kugelwelle aus  $\|x\| = at$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $a$  vom Ursprung weg bewegt. Am Anfang haben wir Ruhe, dann Anregung und dann wieder Ruhe. Dies nennt man das *Huygenssche Prinzip*.

Aus dem Superpositionsprinzip folgt, dass die Lösung  $u(x_0, t_0)$  einer Anfangsanregung  $u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t)$  vollständig bestimmt ist durch die Werte von  $u_0$  und  $u_1$  auf der Sphäre  $\|x - x_0\| = at_0$ .



Die Anfangsanregung sei nun in einer kompakten Menge  $K$  liegt und nicht nur in einem Punkt. Angenommen  $d$  und  $D$  sind die minimalen und maximalen Abstände des Punktes  $x$  von  $K$ . Dann beginnt die Anregung der Welle in  $x$  zum Zeitpunkt  $t_0 = d/a$  und endet in  $x$  zum Zeitpunkt  $D/a$ . Für  $t > D/a = t_1$  herrscht bei  $x$  wieder Ruhe. Wir beobachten also eine vordere Wellenfront zum Zeitpunkt  $t_0$  und eine hintere Wellenfront zur Zeit  $t_1$ .

Dies zeigt, dass der Einflussbereich  $M(K)$  von  $K$  die Vereinigung aller Ränder der Vorwärtlichtkegel  $\Gamma_+(y, 0)$  ist, wobei  $y \in K$ .

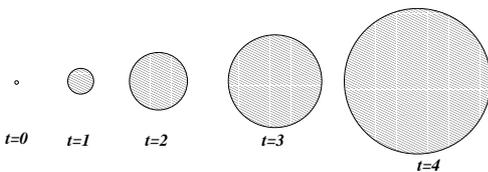
$$M(K) = \{(y, s) \mid \exists x \in K : \|x - y\| = as\}.$$

**(b) Ausdehnung ebener Wellen**

Wir betrachten die Fundamentallösung

$$E_2(x, t) = \frac{H(at - \|x\|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - \|x\|^2}}, \quad x = (x_1, x_2)$$

des 2-dimensionalen Wellenoperators.



Es zeigt sich, dass eine Anregung im Nullpunkt sich in der gesamten Kreisscheibe  $U_{at}$  vom Radius  $at$  um  $0$  auswirkt. Auch hier gibt es eine vordere Wellenfront, die sich mit Geschwindigkeit  $a$  ausbreitet. Im Gegensatz zum 3-dimensionalen Bild gibt es hier aber *keine* hintere Wellenfront. Die Welle ist von einem Zeitpunkt  $t_0$  an ständig präsent. Man spricht von *Wellendiffusion*; Das Huygenssche Prinzip gilt hier nicht.

Diffusion tritt bei beliebiger Anfangsanregung  $u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t)$  auf. Nach dem Superpositionsprinzip ist der Einflussbereich einer Störung in einer kompakten Menge  $K$  die Vereinigung aller Kreisscheiben  $U_{at}(y)$  mit  $y \in K$ .

**(c) Wellenausbreitung in  $\mathbb{R}^1$**

Es ist  $E_1(x, t) = \frac{1}{2a}H(at - |x|)$ . Eine Störung zum Zeitpunkt  $0$  im Nullpunkt wirkt sich auf das gesamte Intervall  $[-at, +at]$  aus. Es gibt zwei vordere Wellenfronten, eine links bei  $x = -at$  und eine rechts, im Punkt  $x = at$ . Wie bei der ebenen Welle gibt es keine hintere Wellenfront. Es herrscht Diffusion. Mehr Details findet man bei Wladimirow, [Wla72, p. 155 – 159].

## 8.3 Die Fourierreihe zur Lösung von Rand-Anfangswertproblemen

Eine sehr schöne Darstellung dieser Methode findet man im Buch [KK71].

In diesem Abschnitt wollen wir Randwertprobleme, Eigenwertprobleme und Rand-Anfangswertprobleme für Wärme, Welle und Laplace formulieren und Lösungsmethoden vorstellen. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei die Fourierreihenentwicklung.

Wir erinnern daran, dass die folgenden Mengen VNOS in Hilberträumen sind:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad H = L^2(a, a + 2\pi),$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2\pi i}{b-a} nt} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad H = L^2(a, b),$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad H = L^2(a, a + 2\pi),$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(\frac{2\pi}{b-a} nt\right), \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left(\frac{2\pi}{b-a} nt\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad H = L^2(a, b),$$

Jeder Funktion  $f \in L^1(0, 2\pi)$  kann man eine Fourierreihe zuordnen

$$f \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Diese komplexe Form lässt sich mit Hilfe von  $\sin$  und  $\cos$  auch reell schreiben. Betrachtet man nur das *halbe* Intervall  $[0, \pi]$ , so reichen bereits die Sinus- oder Kosinusfunktionen allein aus zur Entwicklung.

**Lemma 8.13** Jede der folgenden Mengen ist ein VNOS im Hilbertraum  $H = L^2(0, \pi)$ .

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt) \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nt) \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

*Beweis.* Die Orthogonalität und Normiertheit prüft man leicht nach. Wir zeigen die Vollständigkeit der ersten Menge. Sei  $f \in L^2(0, \pi)$ . Wir setzen  $f$  über 0 hinaus zu einer ungeraden Funktion  $\tilde{f} \in L^2(-\pi, \pi)$  fort, also  $\tilde{f}(x) = f(x)$  und  $\tilde{f}(-x) = -f(x)$  für  $x \in (0, \pi)$ . Da  $\tilde{f}$  eine ungerade Funktion ist, verschwinden in ihrer Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

alle Kosinusfunktionen, also,  $a_n = 0$  für alle  $n$ . Da die Fourierreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$  im  $L^2(-\pi, \pi)$  gegen  $\tilde{f}$  konvergiert (wegen der Vollständigkeit des Sinus-Kosinus-Systems), konvergiert sie gegen  $f$  im  $L^2(0, \pi)$ . Damit ist das Sinus-System vollständig. Der Beweis für das Kosinus-System ist analog. ■

### 8.3.1 Randanfangswertprobleme (RAWP)

#### (a) Die homogene Wärmeleitungsgleichung mit periodischen Randbedingungen

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung in einer geschlossenen Drahtschlinge der Länge  $2\pi$ . Es sei  $u(x, t)$  die Temperatur des Drahtes am Ort  $x$  zur Zeit  $t$ . Da der Draht geschlossen ist, gilt  $u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$ ; also ist  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  in der Ortsvariable eine  $2\pi$ -periodische Funktion. Somit haben wir die folgenden *periodischen* Randbedingungen.

$$u(0, t) = u(2\pi, t), \quad u_x(0, t) = u_x(2\pi, t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{PRB})$$

Die Anfangstemperaturverteilung zur Zeit  $t = 0$  ist für alle  $x$  gegeben, so dass die Rand-Anfangswertbedingungen (RAWB) wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} u_t - a^2 u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

(PRB).

Dabei ist natürlich auch  $u_0$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion.

**Trennung der Variablen.** Wir suchen nach Lösungen der Form  $u = f \otimes g$ ,

$$u(x, t) = f(x) \cdot g(t)$$

und vernachlässigen vorerst die Anfangsbedingungen. Die Wärmeleitungsgleichung hat dann die Gestalt

$$f(x)g'(t) = a^2 f''(x)g(t) \iff \frac{1}{a^2} \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = \kappa = \text{const.}$$

Wir erhalten also ein System aus zwei voneinander unabhängigen gewöhnlichen Differentialgleichungen, die allein über den Parameter  $\kappa$  gekoppelt sind.

$$f''(x) - \kappa f(x) = 0, \quad g'(t) - a^2 \kappa g(t) = 0.$$

Die periodischen Randbedingungen liefern:

$$f(0)g(t) = f(2\pi)g(t), \quad f'(x)g(t) = f'(2\pi)g(t),$$

was bei nichttrivialen Lösungen  $g$  auf  $f(0) = f(2\pi)$  und  $f'(0) = f'(2\pi)$  führt. Im Falle  $\kappa = 0$  ist also  $f''(x) = 0$  mit allgemeiner Lösung  $f(x) = ax + b$ . Die einzige periodische Lösung ist dann  $f(x) = b = \text{const.}$  Sei nun  $\kappa = -\nu^2 < 0$ . Dann ist die allg. Lösung der gDGL zweiter Ordnung

$$f(x) = c_1 \cos(\nu x) + c_2 \sin(\nu x).$$

Offensichtlich ist  $f$  genau dann  $2\pi$ -periodisch, wenn  $\nu$  eine *diskrete* Menge von Werten annimmt, nämlich  $\nu_n = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Hieraus folgt  $\kappa_n = -n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Schließlich ist im Falle  $\kappa = \nu^2 > 0$  die allgemeine Lösung

$$f(x) = c_1 e^{\nu x} + c_2 e^{-\nu x},$$

welche keine nichttrivialen periodischen Lösungen hat. Daher erhalten wir die folgenden Lösungen:

$$f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

zu  $\kappa_n = -n^2$ . Die gDGL für  $g_n(t)$  lautet dann

$$g'_n(t) + a^2 n^2 g_n(t) = 0.$$

Ihre Lösung ist  $g_n(t) = ce^{-a^2 n^2 t}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Folglich hat das Randwertproblem die Lösungen

$$u_n(x, t) = e^{-a^2 n^2 t} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad u_0(x, t) = \frac{a_0}{2}$$

sowie deren endliche und „unendliche“ Linearkombinationen.

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2 n^2 t} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (8.19)$$

Nun kommen wir zur Anfangsbedingung zurück. Setzt man  $t = 0$  in die allgemeine Lösung des RWP ein, so ergibt sich

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad (8.20)$$

was mit der Fourierentwicklung der gegebenen Funktion  $u_0(x)$  übereinstimmen muss. Folglich liefern die Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  von  $u_0$  die formale Lösung  $u(x, t)$ . Die folgenden Fragen sind noch zu klären:

1. Konvergiert die Fourierreihe von  $u_0$  tatsächlich *punktweise* gegen  $u_0$ , so dass (8.19) in  $t = 0$  die AB erfüllt?
2. Unter welchen Voraussetzungen ist die Lösung (8.19) in  $C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  und erfüllt die Wärmeleitungsgleichung?

**Lemma 8.14** *Wir betrachten das RAWP (8.18). (a) Existenz Es sei  $u_0 \in C^4(\mathbb{R})$  periodisch. Dann ist die Funktion  $u(x, t)$  in (8.19) in der Funktionenklasse  $C_{x,t}^{2,1}([0, 2\pi] \times \mathbb{R}_+)$  und löst das klassische RAWP (8.18).*

(b) Eindeutigkeit und Stabilität. *In der Funktionenklasse  $C_{x,t}^{2,1}([0, 2\pi] \times \mathbb{R}_+)$  ist die Lösung des obigen RAWP eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* (a) Zunächst hat man zwischen den komplexen Fourierkoeffizienten  $c_k(f')$  und den Koeffizienten  $c_k(f)$  die Beziehung  $c_k(f') = ik c_k(f)$ . Dies folgt sofort aus der Definition mit Hilfe der partiellen Integration.

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \left( f(x) e^{-ikx} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x) (-ik) e^{-ikx} dx \right) = ik c_k(f).$$

Also gilt  $c_k(u_0^{(4)}) = k^4 c_k(u_0)$  und somit  $|c_k(u_0)| \leq \frac{C}{k^4}$  für alle  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Die Fourierkoeffizienten von  $u_0^{(4)}$  sind beschränkt durch  $|c_n| \leq \frac{C}{1+n^4}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Damit findet man für die gliedweise abgeleiteten Reihen zu  $u_{xx}(x, t)$  und  $u_t(x, t)$  eine summierbare Majorante  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Folglich konvergieren beide Reihen gleichmäßig (Kriterium von Weierstraß, siehe Bemerkung 7.6 (d)).

Daher darf die Reihe  $u(x, t)$  zweimal gliedweise differenziert werden nach  $x$  und einmal nach  $t$ .

(b) Für jedes feste  $t \geq 0$  ist  $u(x, t)$  eine stetige Funktion in  $x$ . Wir betrachten die nichtnegative Funktion  $v(t) := \|u(x, t)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2$ . Dann ist

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{d}{dt} \left( \int_0^{2\pi} u(x, t)^2 dx \right) = 2 \int_0^{2\pi} u(x, t) u_t(x, t) dx = 2 \int_0^{2\pi} u(x, t) a^2 u_{xx}(x, t) dx \\ &= 2 \left( a^2 u_x u \Big|_0^{2\pi} - a^2 \int_0^{2\pi} (u_x(x, t))^2 dx \right) = -2a^2 \int_0^{2\pi} u_x^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass  $v(t)$  eine monoton fallende Funktion in  $t$  ist.

Angenommen, es gibt zwei Lösungen  $u_1$  und  $u_2$ , die beide das RAWP lösen. Dann löste  $u = u_1 - u_2$  das RAWP mit homogenen Anfangsbedingungen, also mit  $u(x, 0) = 0$ . Folglich ist  $v(0) = \|u(x, 0)\|_{L^2}^2 = 0$ . Da aber  $v(t)$  monoton fallend ist für  $t \geq 0$  und außerdem  $v(t) \geq 0$  für alle  $t \geq 0$ , ist  $v(t) = 0$  für alle  $t > 0$ . Das heißt,  $u(x, t) = 0$  in  $L^2(0, 2\pi)$  für alle  $t \geq 0$ . Da  $u(x, t)$  stetig in  $x$  ist, folgt  $u(x, t) = 0$  für alle  $x$  und  $t$ . Also ist  $u_1(x, t) = u_2(x, t)$  — die Lösung ist eindeutig.

*Stabilität.* Da  $v(t)$  monoton fallend ist, gilt

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(x, t)\|_{L^2(0, 2\pi)} \leq \|u_0\|_{L^2(0, 2\pi)}.$$

Dies zeigt, dass kleine Veränderungen in  $u_0$  nur kleine Veränderungen für die Lösung  $u(x, t)$  nach sich ziehen. Das Problem ist korrekt gestellt. ■

### (b) Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit periodischen Randbedingungen.

Wir untersuchen das RAWP

$$\begin{aligned} u_t - a^2 u_{xx} &= f(x, t), \\ u(x, 0) &= 0, \\ &(\text{PRB}). \end{aligned} \tag{8.21}$$

*Lösung.* Es sei  $e_n(x) = e^{inx} / \sqrt{2\pi}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , ein VNOS in  $L^2(0, 2\pi)$ . Diese Funktionen sind alles Eigenfunktionen bezüglich des Differentialoperators der zweiten Ableitung,  $\frac{d^2}{dx^2}$ , denn es ist  $e_n''(x) = -n^2 e_n(x)$ . Sein nun  $t > 0$  fixiert und

$$f(x, t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e_n(x)$$

die Fourierreihe von  $f(x, t)$  mit den Koeffizienten  $c_n(t)$ . Wir wählen nun den folgenden Ansatz für  $u$ :

$$u(x, t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n(t) e_n(x) \tag{8.22}$$

Wenn  $f(x, t)$  stetig in  $x$  ist und stückweise stetig differenzierbar ist bzgl.  $x$ , dann konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  punktweise und wir haben

$$u_t - a^2 u_{xx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e_n d'(t) + a^2 n^2 e_n d(t)) = f(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n(t) e_n.$$

Für alle  $n$  liefert dies eine gDGL in  $t$ :

$$d'_n(t) + a^2 n^2 d_n(t) = c_n(t), \quad d_n(0) = 0.$$

Aus der Theorie der gDGL ist die Lösung bekannt:

$$d_n(t) = e^{-a^2 n^2 t} \int_0^t e^{a^2 n^2 s} c_n(s) ds.$$

Unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen und Wachstumsbedingungen an  $f$  ist (8.22) eine Lösung des inhomogenen RAWP.

### (c) Die homogene Wellengleichung mit Dirichletschen Randbedingungen

Wir betrachten das folgende RAWP für die schwingende Saite der Länge  $\pi$ :

$$(We) \quad u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$

$$(RB) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$

$$(AB) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < \pi.$$

Der Ansatz  $u(x, t) = f(x)g(t)$  führt auf

$$\frac{f''}{f} = \kappa = \frac{g''}{a^2 g}, \quad f''(x) = \kappa f(x), \quad g'' = \kappa a^2 g.$$

Die (RB) liefern  $f(0) = f(\pi) = 0$ . Somit hat die erste gDGL die einzige Lösung

$$f_n(x) = c_n \sin(nx), \quad \kappa_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die entsprechenden gDGL für  $g$  lauten dann

$$g''_n + n^2 a^2 g_n = 0;$$

ihre allgemeine Lösung ist  $a_n \cos(nat) + b_n \sin(nat)$ . Folglich ist

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nat) + b_n \sin(nat)) \sin(nx)$$

eine Lösung des Randwertproblems ohne Beachtung von (AB). Nun setzen wir die Anfangsbedingungen ein und erhalten bei  $t = 0$ :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a b_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} \psi(x).$$

Da  $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  ein VNOS im Hilbertraum  $L^2(0, \pi)$  ist, können wir die Fourier-Sinus-Koeffizienten von  $\varphi$  bzw.  $\psi$  bestimmen und erhalten  $a_n$  bzw.  $b_n$ .

Regularität (Differenzierbarkeit der Reihe). Wenn  $\varphi \in C^4([0, \pi])$  und  $\psi \in C^3([0, \pi])$ , dann haben die Koeffizienten  $a_n$  und  $anb_n$  von  $\varphi$  und  $\psi$  das Wachstum von höchstens  $1/n^4$  bzw. von  $1/n^3$ . Also kann die Reihe

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nat) + b_n \sin(nat)) \sin(nx) \quad (8.23)$$

zweimal nach  $x$  und einmal nach  $t$  abgeleitet werden, da die differenzierten Reihen gleichmäßig konvergieren; sie haben die summierbare Reihe  $\sum c/n^2$  als obere Schranke. Also löste (8.23) das RAWP.

#### (d) Die Wellengleichung mit inhomogene Randbedingungen

Wir betrachten das folgende Problem im Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 \Delta u &= 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) &= 0 \\ u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} &= w(x, t). \end{aligned}$$

*Idee.* Wir setzen  $w$  fort zu  $v(x, t)$ ,  $v \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$  und suchen eine Funktion  $\tilde{u} = u - v$ . Dann hat  $\tilde{u}$  verschwindende Randwerte, (also Randwerte, die Null sind) und erfüllt das folgende RAWP

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - a^2 \Delta \tilde{u} &= -v_{tt} + a^2 \Delta v, \\ \tilde{u}(x, 0) = -v(x, 0), \quad \tilde{u}_t(x, 0) &= -v_t(x, 0) \\ \tilde{u}|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem kann wiederum aufgeteilt werden in zwei Probleme, eines mit homogener Wellengleichung und eines mit homogenen Anfangsbedingungen.

### 8.3.2 Eigenwertprobleme für die Laplace-Gleichung

Im vorigen Abschnitt wurde bereits klar, dass die Fouriermethode für RAWP bei Wärme und Welle schnell auf Eigenwertprobleme für die Laplace-Gleichung führt.

Wir formulieren das Problem: Sei  $n = 1$  und  $\Omega = (0, l)$ . Wir betrachten das folgende Eigenwertproblem zur „Laplace-Gleichung“  $f'' = \lambda f$ :

- Dirichletsche Randbedingungen:  $f(0) = f(l) = 0$ .
- Neumannsche Randbedingungen:  $f'(0) = f'(l) = 0$ .
- Periodische Randbedingungen:  $f(0) = f(l)$ ,  $f'(0) = f'(l)$ .
- Gemischte Randbedingungen:  $\alpha_1 f(0) + \alpha_2 f'(0) = 0$ ,  $\beta_1 f(l) + \beta_2 f'(l) = 0$ .

- Symmetrische Randbedingungen: Sind  $u$  und  $v$  Funktionen, die diese Bedingungen erfüllen, so soll gelten  $(u'v - uv')|_0^l = 0$ . In diesem Fall liefert partielle Integration

$$\int_0^l (u''v - uv'') dx = u'v - v'u \Big|_0^l - \int_0^l (u'v' - v'u') dx = 0.$$

Somit gilt  $\langle u'', v \rangle = \langle u, v'' \rangle$  und der Laplace-Operator wird symmetrisch.

**Satz 8.15** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Das Eigenwertproblem mit Dirichletschen Randbedingungen

$$\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \quad (8.24)$$

hat abzählbar viele Eigenwerte  $\lambda_k$ . Sie sind alle negativ und von endlicher Vielfachheit. Wenn man sie anordnet als  $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$  dann ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = -\infty$ . Die Eigenfunktionen  $u_k$  zu  $\lambda_k$  bilden ein VNOS im Hilbertraum  $L^2(\Omega)$ .

**Beispiel 8.1 Dirichlet-Bedingungen für das Quadrat.** Es sei  $Q = (0, \pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$ . Der Laplace-Operator mit Dirichletschen Randbedingungen auf  $\Omega$  hat dann die Eigenfunktionen

$$u_{mn}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sin(mx) \sin(ny),$$

zu den Eigenwerten  $\lambda_{mn} = -(m^2 + n^2)$ . Die Eigenfunktionen  $\{u_{mn} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  bilden ein VNOS im Hilbertraum  $L^2(\Omega)$ .

**Beispiel 8.2 Dirichlet-Bedingungen für die Kreisscheibe  $U_1(\mathbf{0})$  in  $\mathbb{R}^2$ .** Wir betrachten das Eigenwertproblem mit Dirichletschen Randbedingungen auf dem Kreis.

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{S_1(\mathbf{0})} = 0.$$

In Polarkoordinaten  $u(x, y) = \tilde{u}(r, \varphi)$  heißt das

$$\Delta \tilde{u}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{u}_r) + \frac{1}{r^2} \tilde{u}_{\varphi\varphi} = -\lambda \tilde{u}, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

*Trennung der Variablen.* Mit dem Ansatz  $\tilde{u}(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$  und den Randbedingungen erhält man  $R(1) = 0$  und  $R(r)$  ist in einer Umgebung von 0 beschränkt. Außerdem ist  $\Phi(\varphi)$  periodisch. Dann ist  $\frac{\partial}{\partial r} \tilde{u} = R'\Phi$  und

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{u}_r) = \frac{\partial}{\partial r} (r R' \Phi) = (R' + r R'') \Phi, \quad \tilde{u}_{\varphi\varphi} = R \Phi''.$$

Folglich sieht die Gleichung  $\Delta u = -\lambda u$  nun so aus:

$$\begin{aligned} \left( \frac{R'}{r} + R'' \right) \Phi + \frac{R}{r^2} \Phi'' &= -\lambda R \Phi \\ \frac{\frac{R'}{r} + R''}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} &= -\lambda \\ \frac{rR' + r^2R''}{R} + \lambda r^2 &= -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu. \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir zwei eindimensionale Probleme

$$\begin{aligned} \Phi'' + \mu\Phi &= 0, & \Phi(0) &= \Phi(2\pi); \\ r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - \mu)R &= 0, & |R(0)| &< \infty, & R(1) &= 0. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Die Eigenwerte- und Eigenfunktionen zum ersten Problem sind

$$\mu_k = k^2, \quad \Phi_k(\varphi) = e^{ik\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Gleichung (8.25) heißt *Besselsche* Differentialgleichung; sie ist eine gDGL 2. Ordnung. Für  $\mu = k^2$  ist die Lösung von (8.25) im Punkte  $r = 0$  beschränkt und sie ist gegeben durch die *Bessel-Funktion*  $J_k(r\sqrt{\lambda})$ . Als Potenzreihe (auf ganz  $\mathbb{C}$ ) ist sie gegeben durch

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!(n+k)!}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Um die Eigenwerte  $\lambda$  zu bestimmen, benutzen wir die Randbedingung  $R(1) = 0$ . Eingesetzt in (8.25) liefert das  $J_k(\sqrt{\lambda}) = 0$ . Folglich ist  $\sqrt{\lambda} = \mu_{kj}$ , wobei  $\mu_{kj}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , die positiven Nullstellen von  $J_k$  sind. Wir erhalten

$$\lambda_{kj} = \mu_{kj}^2, \quad R_{kj}(r) = J_k(\mu_{kj} r), \quad j = 1, 2, \dots.$$

Die Lösungen des REWP sind

$$\lambda_{kj} = \mu_{kj}^2, \quad u_{kj}(x) = J_{|k|}(\mu_{|k|j} r) e^{ik\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Man beachte, dass die Bessel-Funktionen  $\{J_k \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$  und das System  $\{e^{ikt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  ein VOS im Hilbertraum  $L^2((0, 1), r dr)$  bzw. im Hilbertraum  $L^2(0, 2\pi)$  bilden. Folglich ist  $\{u_{kl} \mid k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}_+\}$  ein VOS im Hilbertraum  $L^2(U_1(0))$ . Somit kann es keine weiteren Lösungen des REWP geben. Mehr zu Besselfunktionen findet man in Fischer/Kaul, Band 2, siehe [FK98, p. 383].

## 8.4 Randwertprobleme für die Laplace und die Poissongleichung

In diesem Abschnitt ist  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Wir setzen weiter voraus, dass  $\Omega$  zur Klasse  $C^2$  gehört, das heißt, der Rand  $\partial\Omega$  von  $\Omega$  ist eine zweimal stetig differenzierbare reguläre Hyperfläche, d. h., in jedem Randpunkt existiert die Tangentialhyperebene. Wir setzen weiter voraus, dass  $\Omega' := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$  ein zusammenhängendes Gebiet ist. Alle Funktionen sind reellwertig.

### 8.4.1 Formulierung der Randwertprobleme

#### (a) Das innere Dirichlet-Problem:

Gegeben seien stetige Funktionen  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  und  $f \in C(\overline{\Omega})$ , gesucht ist eine Funktion  $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ , so dass gilt

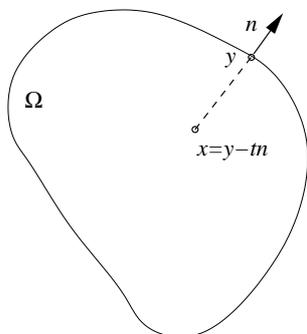
$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \text{and} \\ u(y) &= \varphi(y), \quad \forall y \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

#### (b) Das äußere Dirichlet-Problem:

Gegeben seien stetige Funktionen  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  und  $f \in C(\overline{\Omega'})$ , gesucht ist eine Funktion  $u \in C(\overline{\Omega'}) \cap C^2(\Omega')$ , sodass

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= f(x), \quad \forall x \in \Omega', \quad \text{and} \\ u(y) &= \varphi(y), \quad \forall y \in \partial\Omega, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) &= 0.\end{aligned}$$

#### (c) Das innere Neumann-Problem:



Gegeben seien stetige Funktionen  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  und  $f \in C(\overline{\Omega})$ , gesucht ist eine Funktion  $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ , sodass

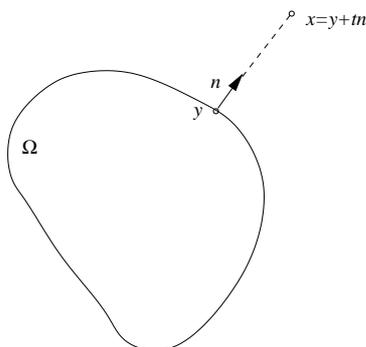
$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \text{and} \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_-}(y) &= \varphi(y), \quad \forall y \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

Dabei setzen wir voraus, dass der folgende Grenzwert  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_-}(y)$  für alle  $y \in \partial\Omega$  existiert

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_-}(y) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \vec{n}(y) \cdot \text{grad } u(y - t\vec{n}(y))$$

Hierbei ist  $\vec{n}(y)$  die äußere Normale an  $\Omega$  im Punkt  $y \in \partial\Omega$ . Das heißt,  $x \in \Omega$  nähert sich dem Punkt  $y \in \partial\Omega$  in Richtung des Normalenvektors  $\vec{n}(y)$ .

#### (d) Das äußere Neumann-Problem:



Gegeben seien Funktionen  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  und  $f \in C(\overline{\Omega'})$ , gesucht ist eine Funktion  $u \in C(\overline{\Omega'}) \cap C^2(\Omega')$ , sodass

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= f(x) \quad \forall x \in \Omega', \quad \text{and} \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_+}(y) &= \varphi(y), \quad \forall y \in \partial\Omega \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) &= 0.\end{aligned}$$

Dabei setzen wir voraus, dass der folgende Grenzwert  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_+}(y)$  der Richtungsableitung in jedem Randpunkt  $y$  existiert.

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_+}(y) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \vec{n}(y) \cdot \text{grad } u(y + t \vec{n}(y)).$$

Hierbei ist  $\vec{n}(y)$  die äußere Normale an  $\Omega$  im Punkt  $y \in \partial\Omega$ . In beiden Neumann-Problemen kann man auch nach Funktionen  $u$  suchen mit  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  bzw.  $u \in C^2(\Omega') \cap C(\overline{\Omega}')$ , vorausgesetzt, die obigen beiden Limiten existieren und definieren eine stetige Funktion auf dem Rand.

Diese vier Probleme sind eng miteinander verknüpft, und man erhält simultan Lösungen zu allen vier Problemen.

Hier ist das Hauptergebnis.

### 8.4.2 Existenzsätze

**Theorem 8.16** *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet, das die obigen Voraussetzungen erfüllt. Das innere Dirichlet-Problem zur Laplace-Gleichung hat eine eindeutig bestimmte Lösung. Diese kann als Potential der doppelten Schicht mit einer Dichte  $\mu$  wie folgt dargestellt werden:*

$$V(x) = \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial E_n}{\partial \vec{n}}(x-y) \, dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (8.26)$$

*Das äußere Neumann-Problem hat ebenfalls eine eindeutig bestimmte Lösung. Diese kann als Potential der einfachen Schicht mit einer Dichte  $\mu$  dargestellt werden:*

$$W(x) = \int_{\partial\Omega} \mu(y) E_n(x-y) \, dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (8.27)$$

**Theorem 8.17** *Unter denselben Voraussetzungen an das Gebiet  $\Omega$  gilt, dass das innere Neumann-Problem zur Laplace-Gleichung genau dann lösbar ist, wenn  $\int_{\partial\Omega} \varphi(y) \, dS(y) = 0$ . Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Lösung bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Das äußere Dirichlet-Problem hat eine eindeutig bestimmte Lösung.*

**Beispiel 8.3** Man löse das Dirichletsche RWP

$$\begin{aligned} \Delta u &= -2, & (x, y) \in \Omega &= (0, a) \times (-b/2, b/2), \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Ansatz:  $u = w + v$  mit  $\Delta w = 0$ . Zum Beispiel wähle man  $w(x, y) = -x^2 + ax$ . Dann ist  $\Delta v = 0$  mit den Randwerten

$$v(0, y) = v(a, y) = 0, \quad v(x, -b/2) = v(x, b/2) = x^2 - ax.$$

Nun kann man Separation der Variablen benutzen,  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  um das Problem zu lösen.

### 8.4.3 Grundeigenschaften harmonischer Funktionen

Eine Funktion  $u \in C^2(\Omega)$  heißt *harmonisch* in  $\Omega$ , wenn  $\Delta u(x) = 0$  für alle  $x \in \Omega$ .

Der Laplace-Operator ist translations- und dreihinvariant, das heißt, für alle Funktionen  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\Delta(Tu) = T\Delta(u)$ , wobei  $T(x) = A \cdot x + b$  mit einer orthogonalen Matrix  $A$  und  $b \in \mathbb{R}^n$ .

Wir wollen voraussetzen, dass  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet ist für das der Gaußsche Satz für alle Vektorfelder  $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  gilt:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} f(y) \cdot \vec{dS}(y),$$

wobei  $\cdot$  das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet.

Wir erhalten die erste Greensche Formel, wenn wir  $f(x) = v(x)\nabla u(x)$ ,  $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$  einsetzen:

$$\int_{\Omega} v(x)\Delta u(x) \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} v(y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \, dS(y).$$

Durch Vertauschen der Rollen von  $u$  und  $v$  haben wir als Differenz die zweite Greensche Formel Formel:

$$\int_{\Omega} (v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left( v(y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) - u(y) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(y) \right) \, dS(y). \quad (8.28)$$

### Mittelwerteigenschaften harmonischer Funktionen

**Satz 8.18 (Mittelwerteigenschaften)** *Es sei  $u$  in  $U_R(x_0)$  harmonisch und stetig in  $\overline{U_R(x_0)}$ .*

(a) *Dann stimmt  $u(x_0)$  überein mit seinem sphärischen Mittel über die Sphäre  $S_R(x_0)$ .*

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{S_R(x_0)} u(y) \, dS(y) \quad (\text{sphärisches Mittel}). \quad (8.29)$$

(b)  *$u(x_0)$  stimmt überein mit dem Mittelwert über die Vollkugel um  $x_0$  vom Radius  $R$*

$$u(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{U_R(x_0)} u(x) \, dx \quad (\text{Gaußsches Mittel}).$$

**Bemerkung 8.4** Erfüllt umgekehrt eine stetige Funktion für alle Punkte eines Gebietes und alle Radien die Gaußsche oder sphärische Mittelwerteigenschaft, so ist diese Funktion harmonisch und  $C^\infty$ .

**Satz 8.19 (Maximumprinzip)** *Es sei  $u$  in  $\Omega$  harmonisch und in  $\overline{\Omega}$  stetig. Dann gilt*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

*Mit anderen Worten,  $u$  nimmt sein Maximum auf dem Rand von  $\Omega$  an. Dasselbe gilt für das Minimum.*

**Bemerkung 8.5** Es gilt sogar, dass alle lokalen Extrema auf dem Rand angenommen werden. Mit Hilfe des Maximumprinzips zeigt man die Eindeutigkeit der Lösung der Dirichlet-Probleme.

**Theorem 8.20 (Greensche Darstellungsformel)** Es sei  $E_n$  die Fundamentallösung des Laplace-Operators im  $\mathbb{R}^n$  und  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ .

Dann gilt für alle  $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \left( u(y) \frac{\partial E_n}{\partial \vec{n}_y}(x-y) - E_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \right) dS(y) \quad (8.30)$$

Dabei ist  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}$  die Richtungsableitung in Richtung der äußeren Normalen.

In expliziter Form haben wir im Fall  $n = 3$ :

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(y)}{\|x-y\|} dy + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{\|x-y\|} \right) dS(y). \quad (8.31)$$

Mit anderen Worten,  $u$  kann als Summe von drei Potentialen geschrieben werden:  $u(x) = V(x) + V^{(0)}(x) + V^{(1)}(x)$ .

Man beachte, dass die drei Faltungen existieren, da stets nur über eine kompakte Menge integriert wird. Beweisidee: Anwenden der zweiten Greenschen Formel auf  $u(y)$ ,  $E_n(y-x)$  und das Gebiet  $\Omega \setminus U_\varepsilon(x)$ .

**Bemerkung 8.6** (a) Greens Darstellungsformel gilt auch für Funktionen  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ .

(b) Folglich gilt: Kennen wir  $\Delta u$ , dann ist  $u$  vollständig bestimmt durch seine Werte und die Werte der Normalenableitung auf dem Rand  $\partial\Omega$ . Insbesondere ist eine auf  $\Omega$  harmonische Funktion bereits vollständig bestimmt durch ihre Randdaten ( $u(y)$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(y)$ ). Umgekehrt könnte man fragen, ob beliebig vorgegebene Randdaten  $u(y)$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(y)$  eine eindeutig bestimmte auf  $\Omega$  harmonische Funktion definieren. Wir haben gesehen (Theorem 8.16 und Theorem 8.17), dass dies *nicht* so ist. Grob gesagt, reicht bereits *ein* Datum aus, Randwert  $u(y)$  oder Normalenableitung am Rand, um die harmonische Funktion  $u$  vollständig zu bestimmen.

(c) Im Falle einer harmonischen Funktion lautet die Darstellungsformel  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\Delta u = 0$ , im Falle  $n = 3$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}} - u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{\|x-y\|} \right) dS(y). \quad (8.32)$$

Insbesondere können die Potentiale der einfachen und doppelten Schicht  $V^{(0)}(x)$  und  $V^{(1)}(x)$  beliebig oft differenziert werden für  $x \in \Omega$ . Außerhalb des Randes  $\partial\Omega$  sind  $V^{(0)}$  und  $V^{(1)}$  beide harmonisch. Aus der Formel (8.32) folgt, dass jede harmonische Funktion automatisch in  $C^\infty(\Omega)$  ist.

## 8.5 Die Greensche Funktion zur Laplace-Gleichung

Es sei  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ . Wir kombinieren die Greensche Darstellungsformel und die zweite Greensche Formel für eine harmonische Funktion  $v(x) = v_y(x)$ ,  $x \in \Omega$ , wobei  $y \in \Omega$  als Parameter auftritt.

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left( u(x) \frac{\partial E_n}{\partial \vec{n}_x}(x-y) - E_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) \right) dS(x) \\ 0 &= \int_{\Omega} v_y(x) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left( u(x) \frac{\partial v_y}{\partial \vec{n}}(x) - v_y(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) \right) dS(x) \end{aligned}$$

Addiert man diese beiden Formeln und setzt man  $G(x, y) = E_n(x-y) + v_y(x)$ , so hat man

$$u(y) = \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left( u(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_x} - G(x, y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) \right) dS(x).$$

Angenommen,  $G(x, y)$  verschwindet nun für alle  $x \in \partial\Omega$ , dann ist das letzte Oberflächenintegral gleich 0 und

$$u(y) = \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_x} dS(x). \quad (8.33)$$

In der obigen Formel ist  $u$  vollständig durch seine Randwerte und durch  $\Delta u$  in  $\Omega$  bestimmt. Das motiviert die folgende Definition.

**Definition 8.2** Eine Funktion  $G: \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , die die folgenden Bedingungen erfüllt, heißt *Greensche Funktion für  $\Omega$*

- (a)  $G(x, y) = 0$  für alle  $x \in \partial\Omega$ ,  $y \in \overline{\Omega}$ ,  $x \neq y$ .
- (b)  $v_y(x) = G(x, y) - E_n(x-y)$  ist harmonisch in  $x \in \Omega$  für alle  $y \in \Omega$ .

**Bemerkung 8.7** (a) Die Funktion  $v_y(x)$  ist nach (b) harmonisch im Punkte  $x = y$ . Da  $E_n(x-y)$  an dieser Stelle einen Pol hat, muss  $G(x, y)$  bei  $x = y$  ebenfalls einen Pol derselben Ordnung haben, so dass  $G(x, y) - E_n(x-y)$  keine Singularitäten besitzt.

Wenn eine solche Funktion  $G(x, y)$  existiert, dann gilt für alle  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  die Formel (8.33).

Ist insbesondere die Funktion  $u$  harmonisch in  $\Omega$ , so ist

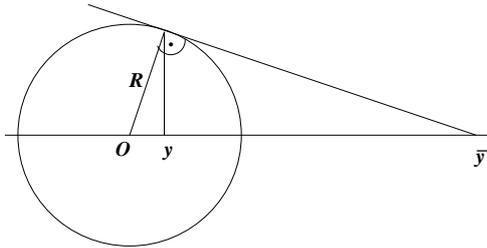
$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_x} dS(x). \quad (8.34)$$

Dies nennt man auch *Poissonsche Formel für  $\Omega$* . I. a. ist es schwierig die Greensche Funktion zu  $\Omega$  zu finden. Für die meisten Gebiete ist es gänzlich unmöglich, sie explizit anzugeben, nichtsdestotrotz existiert eine Greensche Funktion. Wenn  $\Omega$  jedoch eine Symmetrie besitzt, so kann man ein Spiegelungsprinzip nutzen, um die Greensche Funktion zu bestimmen.

### Das Spiegelungsprinzip

Durch wiederholte Spiegelungen an Hyperebenen wird schließlich der gesamte Raum ausgefüllt, ohne Überlappungen. In diesem Fall lässt sich die Greensche Funktion leicht angeben.

**Beispiel 8.4** Die Greensche Funktion für die Kugel  $U_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Hierbei benutzen wir die Spiegelung an der Sphäre  $S_R(0)$ : Für  $y \in \mathbb{R}^n$  setzt man



$$\bar{y} := \begin{cases} y \frac{R^2}{\|y\|^2}, & y \neq 0, \\ \infty, & y = 0. \end{cases}$$

Man beachte, dass diese Abbildung die folgende Eigenschaft hat:  $y \cdot \bar{y} = R^2$  und  $\|y\|^2 \bar{y} = R^2 y$ . Punkte auf der Sphäre gehen in sich selbst über. Es sei  $e_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  die zur Laplace-Fundamentallösung  $E_n$  gehörige Funktion,  $E_n(x) = e_n(\|x\|)$ . Also,  $e_n(r) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n r^{n-2}}$ ,  $n \geq 3$ . Dann setzen wir für  $x, y \in U_R(0)$

$$G(x, y) = \begin{cases} e_n(\|x - y\|) - e_n\left(\frac{\|y\|}{R} \|x - \bar{y}\|\right), & y \neq 0, \\ e_n(\|x\|) - e_n(R), & y = 0. \end{cases} \quad (8.35)$$

Für  $x \neq y$  ist dann  $G(x, y)$  harmonisch in  $x$ : Wegen  $\|y\| < R$  ist  $\|\bar{y}\| > R$  und damit  $x - \bar{y} \neq 0$ . Die Funktion  $G(x, y)$  hat nur Singularitäten bei  $x = y$  und dasselbe gilt für  $e_n(x - y)$ . Also ist

$$v_y(x) = G(x, y) - E_n(x - y) = \begin{cases} -e_n\left(\frac{\|y\|}{R} \|x - \bar{y}\|\right), & y \neq 0, \\ -e_n(R), & y = 0. \end{cases}$$

harmonisch für alle  $x \in \Omega$ . Für  $x \in \partial\Omega = S_R(0)$  gilt bei  $y \neq 0$

$$\begin{aligned} G(x, y) &= e_n\left(\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y\right)^{\frac{1}{2}}\right) - e_n\left(\frac{\|y\|}{R} \left(\|x\|^2 + \|\bar{y}\|^2 - 2x \cdot \bar{y}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= e_n\left(\left(R^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y\right)^{\frac{1}{2}}\right) - e_n\left(\left(\|y\|^2 + \frac{\|y\|^2 \|\bar{y}\|^2}{R^2} - 2\|y\|^2 x \cdot \frac{\bar{y}}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= e_n\left(\left(R^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y\right)^{\frac{1}{2}}\right) - e_n\left(\left(\|y\|^2 + R^2 - 2x \cdot y\right)^{\frac{1}{2}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Für  $y = 0$  ist

$$G(x, 0) = e_n(\|x\|) - e_n(R) = e_n(R) - e_n(R) = 0.$$

Dies beweist, dass  $G(x, y)$  tatsächlich eine Greensche Funktion zur Kugel  $U_R(0)$  ist. Insbesondere zeigt die obige Berechnung, dass  $r = \|x - y\|$  und  $\bar{r} = \frac{\|y\|}{R} \|x - \bar{y}\|$  gleich sind für  $x \in \partial\Omega$ .

Man kann zeigen, dass die Greensche Funktion symmetrisch ist,  $G(x, y) = G(y, x)$ . Dies gilt für alle Greensche Funktionen.

Um Formel (8.33) anwenden zu können, müssen wir die Normalenableitung  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} G(x, y)$  berechnen. Man beachte zunächst, dass für jede Konstante  $z \in \mathbb{R}^n$  und  $x \in S_R(0)$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} f(\|x - z\|) = \vec{n} \cdot \nabla f(\|x - z\|) = \frac{x}{\|x\|} \cdot f'(\|x - z\|) \frac{x - z}{\|x - z\|}.$$

Ferner gilt für  $\|x\| = R$

$$r = \|x - y\| = \frac{\|y\|}{R} \|x - \bar{y}\|, \quad (8.36)$$

$$(x - y) \cdot x - \frac{\|y\|^2}{R^2} (x - \bar{y}) \cdot x = R^2 - \|y\|^2. \quad (8.37)$$

Folglich ist für  $y \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} G(x, y) &= -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \left( \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \|x - y\|^{-n+2} - \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \left( \frac{\|y\|^{-n+2}}{R^{-n+2}} \|x - \bar{y}\|^{-n+2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \left( \|x - y\|^{-n+1} \frac{x - y}{\|x - y\|} \cdot \frac{x}{\|x\|} - \frac{\|y\|^{-n+2}}{R^{-n+2}} \|x - \bar{y}\|^{-n+1} \frac{x - \bar{y}}{\|x - \bar{y}\|} \cdot \frac{x}{\|x\|} \right) \\ &= \frac{1}{\omega_n r^n R} \left( (x - y) \cdot x - (x - \bar{y}) \frac{\|y\|^2}{R^2} \cdot x \right) \end{aligned}$$

Wegen (8.37) ist der Ausdruck in den Klammern gleich  $R^2 - \|y\|^2$ . Somit folgt, dass

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} G(x, y) = \frac{R^2 - \|y\|^2}{\omega_n R} \frac{1}{\|x - y\|^n}.$$

Diese Formel gilt auch bei  $y = 0$ . Setzt man dies in (8.33) ein, so hat man für jede harmonische Funktion:  $u \in C^2(U_R(0)) \cap C(\overline{U_R(0)})$

$$u(y) = \frac{R^2 - \|y\|^2}{\omega_n R} \int_{S_R(0)} \frac{u(x)}{\|x - y\|^n} dS(x). \quad (8.38)$$

Dies ist die sogenannte *Poissonsche Formel für die Kugel*  $U_R(0)$ .

**Satz 8.21** *Es sei  $n \geq 2$ . Wir betrachten das innere Dirichletproblem zur Laplace-Gleichung für die Kugel  $\Omega = U_R(0)$ . Die Funktion*

$$u(y) = \frac{R^2 - \|y\|^2}{\omega_n R} \int_{S_R(0)} \frac{\varphi(x)}{\|x - y\|^n} dS(x), \quad \|y\| < R,$$

und  $u(y) = \varphi(y)$  für  $\|y\| = R$  ist stetig in der abgeschlossenen Kugel  $\overline{U_R(0)}$  und harmonisch im Innern  $U_R(0)$ .

Im Fall  $n = 2$  kann die Funktion  $u(y)$  geschrieben werden in der Form

$$u(y) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{S_R(0)} \varphi(z) \frac{z+y}{z-y} \frac{dz}{z} \right), \quad y \in U_R(0) \subset \mathbb{C}.$$

Insbesondere hat man für  $n = 2$  und  $R = 1$  auch

$$u(r, \varphi) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\psi) d\psi}{r^2 + 1 - 2r \cos(\varphi - \psi)}.$$

Dies erhält man auch durch Einsetzen der Fourierkoeffizienten  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi$  und  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi$  in die Lösungsformel

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) r^n$$

und Vertauschen von Integration und Summation.

*Beweis.* Einsetzen der Fourierkoeffizienten, Additionstheorem  $\cos(\psi - \varphi) = \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi$  und Vertauschen von Summation und Integration liefern:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (f(\psi) \cos n\psi \cos n\varphi + f(\psi) \sin n\psi \sin n\varphi) r^n d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\psi - \varphi)) d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in(\psi-\varphi)} + e^{-in(\psi-\varphi)}) \right) d\psi. \end{aligned}$$

Beachtet man nun, dass hier zwei geometrische Reihen stehen  $\sum_1^{\infty} z^n$  mit  $z = re^{i\delta}$  und  $\bar{z} = re^{-i\delta}$ , so ist das Ergebnis in den runden Klammern gleich

$$1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} = 1 + \frac{z + \bar{z} - 2|z|^2}{1 - z - \bar{z} + |z|^2} = \frac{1-r^2}{1+r^2+2r\cos(\psi-\varphi)}.$$

Dies liefert die Behauptung. ■

**Andere Beispiele** (a)  $n = 3$ . Der Halbraum  $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ . Wir benutzen die gewöhnliche Spiegelung an der Ebene  $x_3 = 0$  und bezeichnen sie mit  $y = (y_1, y_2, y_3) \mapsto y' = (y_1, y_2, -y_3)$ . Dann ist die Greensche Funktion für den oberen Halbraum  $\Omega$  gegeben durch  $\Omega$

$$G(x, y) = E_3(x - y) - E_3(x - y') = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\|x - y'\|} - \frac{1}{\|x - y\|} \right).$$

(b)  $n = 3$ . Die obere Halbkugel  $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < R, \quad x_3 > 0\}$ . Wir benutzen die Spiegelungen  $y \rightarrow y'$  und  $y \rightarrow \bar{y}$  (Spiegelung an der Kugel  $S_R(0)$ ). Dann ist

$$G(x, y) = E_3(x - y) - \frac{R}{\|y\|} E_3(x - \bar{y}) - E_3(x - y') + \frac{R}{\|y\|} E_3(x - \bar{y}')$$

die Greensche Funktion von  $\Omega$ .

(c) Ein Quadrant im  $\mathbb{R}^3$ ,  $n = 3$ ,  $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0, \quad x_3 > 0\}$ . Wir führen die Spiegelung an der Ebene  $x_2 = 0$  ein:  $y = (y_1, y_2, y_3) \mapsto y^* = (y_1, -y_2, y_3)$ . Die Greensche Funktion von  $\Omega$  ist dann

$$G(x, y) = E_3(x - y) - E_3(x - y') - E_3(x - y^*) + E_3(x - (y^*)').$$

### 8.5.1 Die Neumannsche Funktion (Greensche Funktion 2. Art)

Ähnlich, wie oben kann man auch für das Neumannsche Problem eine Greensche Funktion  $H(x, y)$  definieren, die das Randwertproblem löst:

$$u(y) = \int_{\Omega} H(x, y) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left( u(x) \frac{\partial H(x, y)}{\partial \vec{n}_x} - H(x, y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) \right) dS(x). \quad (8.39)$$

Hierbei soll nur das letzte Oberflächenintegral von Null verschieden sein, also muss gelten für  $u = 1$

$$1 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial H(x, y)}{\partial \vec{n}_x} dS(x).$$

Fordert man etwa  $\frac{\partial H(x, y)}{\partial \vec{n}_x} = \alpha = \text{const.}$ , so erhält man für diese Konstante  $\alpha = 1/\text{vol}(\partial\Omega)$ .

Man beachte, dass man anstelle von  $G(x, y) = 0$  auf  $\partial\Omega$  für die Greensche Funktion nun für die Neumannsche Funktion fordert, dass  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} G(x, y) = \text{const.}$ .

Die Lösung  $u$  des Neumann-Problems zur Laplace-Gleichung ( $f = 0$ ) schreibt sich dann als

$$u(y) = C - \int_{\partial\Omega} H(x, y) \varphi(x) dS(x), \quad (8.40)$$

wobei  $C = \alpha \int_{\partial\Omega} u(x) dS(x)$  eine Konstante ist, die man auch weglassen kann.

Die Neumannsche Funktion für die dreidimensionale Kugel vom Radius  $R$  um  $0$ , also für  $U_R(0)$  lautet:

$$H(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\|x - y\|} + \frac{R}{\|y\| \|x - \bar{y}\|} + \frac{1}{R} \ln \frac{2R^2}{R^2 - x \cdot y + \|y\| \|x - \bar{y}\|} \right).$$



# Literaturverzeichnis

- [Arn04] V. I. Arnold. *Lectures in Partial Differential Equations*. Universitext. Springer and Phasis, Berlin. Moscow, 2004.
- [Eva98] L. C. Evans. *Partial differential equations*. Number 19 in Graduate Studies in Mathematics. AMS, Providence, 1998.
- [FK98] H. Fischer and H. Kaul. *Mathematik für Physiker. Band 2*. Teubner Studienbücher: Mathematik. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [For81] O. Forster. *Analysis 3 (in German)*. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. Vieweg, Braunschweig, 1981.
- [GS64] I. M. Gelfand and G. E. Schilow. *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen). III: Einige Fragen zur Theorie der Differentialgleichungen. (German)*. Number 49 in Hochschulbücher für Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.
- [GS69] I. M. Gelfand and G. E. Schilow. *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen). I: Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen. (German)*. Number 47 in Hochschulbücher für Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.
- [Joh82] F. John. *Partial differential equations*. Number 1 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [KK71] A. Kufner and J. Kadlec. *Fourier Series*. G. A. Toombs Iliffe Books, London, 1971.
- [PR05] Y. Pinchover and J. Rubinstein. *An introduction to partial differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [Str92] W. A. Strauss. *Partial differential equations*. John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [Tri92] H. Triebel. *Higher analysis*. Hochschulbücher für Mathematik. Johann Ambrosius Barth Verlag GmbH, Leipzig, 1992.
- [Wal74] W. Walter. *Einführung in die Theorie der Distributionen (in German)*. Bibliographisches Institut, B.I.- Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1974.

- [Wal02] W. Walter. *Analysis 1–2 (in German)*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, fifth edition, 2002.
- [Wla72] V. S. Wladimirow. *Gleichungen der mathematischen Physik (in German)*. Number 74 in Hochschulbücher für Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.

PD Dr. A. Schüler  
Mathematisches Institut  
Universität Leipzig  
04009 Leipzig  
`mailto:Axel.Schueler@math.uni-leipzig.de`