Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Distributionen

I.1 Einführung — Testfunktionen und Distributionen

In diesem Abschnitt werden die Distributionen eingeführt. Distributionen nennt man auch *verallgemeinerte Funktionen*. Sie haben eine Reihe von sehr schönen Eigenschaften: Distributionen sind beliebig oft differenzierbar, man kann die partiellen Ableitungen beliebig vertauschen (Schwarz' Lemma gilt uneingeschränkt), Distributionenfolgen verhalten sich „angenehm" gegenüber Differentiation oder Summation. Wir benutzen später die Distributionen um verallgemeinerte Anfangswertprobleme für die Wärmeleitungsgleichung und für die Wellengleichung aufzuschreiben. Hier spielt die *Fundamentallösung* eines Differentialoperators eine wichtige Rolle — erst mit Hilfe der Distributionen kann dieser Begriff sauber definiert werden.
Verallgemeinerte Funktionen traten erstmals in der Quantenmechanik auf und wurden dort von P. Dirac studiert. Er benutzte systematisch, die nach ihm benannte *δ-Funktion*, die wir besser als δ-Distribution bezeichnen. Die mathematischen Grundlagen dieser Theorie wurden unabhängig voneinander von S. L. Sobolev (1936) und L. Schwartz (1950, 1915 – 2002) gelegt.
Eine gute Einführung ist das Buch von W. Walter [6] und das von O. Forster [2, § 17]. Ausführlichere Darstellungen findet man in H. Triebel (vorhanden in deutsch und englisch) [5], V. S. Wladimirow [8] und in Gelfand/Schilow (drei Bände) [4, 3].

I.1.1 Motivation

Distributionen verallgemeinern den Funktionsbegriff Sie sind *lineare Funktionale* auf gewissen Testfunktionenräumen. Mit Hilfe von Distributionen kann man mathematisch korrekt Punktmassen und Punktladungen beschreiben sowie die Potentiale der einseitigen oder der doppelten Schicht, siehe etwa [1, S. 92].
Die Grundidee ist, dass man einer hinreichend „guten" Funktion f ein lineares Funktional T_f auf den Testfunktionen $\mathscr{D}$ wie folgt zuordnet

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{I.1}$$

Auf der linken Seite benutzten wir die Klammerschreibweise um eine duale Paarung von linearen Räumen zu symbolisieren. Es handelt sich hierbei nicht um ein Skalarprodukt, da die linke und rechte Seite aus verschiedenen Räumen kommen.
Allgemein bezeichnet die Klammer $T\left(\varphi\right)$ die Berechnung des linearen Funktionals T auf der Testfunktion φ. Wir schreiben dafür auch $T(\varphi)$.
Was wir von der Korrespondenz $f \longleftrightarrow T_f$ erwarten sind die folgenden Eigenschaften:

(a) Die Zuordnung sollte *injektiv* sein, d. h: verschiedenen Funktionalen T_f sollen auch verschieden Funktionen f entsprechen. Um dies zu erreichen, muss der Testfunktionenraum hinreichend groß sein.

(b) Die Klasse der Funktionen f, denen eine Distribution T_f entspricht, sollte zumindest alle stetigen Funktionen enthalten. Wenn man jedoch an die Polynome $f(x) = x^n$ denkt, so ergibt sich hieraus, dass die Funktion $f(x)\varphi(x)$ auf $\mathbb{R}$ integrierbar sein soll, also muss $x^n\varphi(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Da Polynome nicht in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ liegen, müssen die Funktionen φ sehr schnell sehr klein werden für $x \to \infty$. Dafür gibt es grob gesagt zwei Möglichkeiten: man nimmt nur die Funktionen φ, die außerhalb einer gewissen von φ abhängigen kompakten Menge Null werden. Dies führt auf die Testfunktionen $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Dann ist T_f genau dann wohldefiniert, wenn f über jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ integrierbar ist. Diese Funktionen f nennt man *lokal integrierbar* auf $\mathbb{R}$.

Zum anderen kann man als Testfunktionen φ die schnell fallende Funktionen $\varphi(x)$ nehmen, genauer gesagt soll gelten

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^n \varphi(x) \right| < \infty$$

für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{Z}_+$. Diese Funktionen sind die sogenannten Schwartzraumfunktionen aus $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(c) Wir wollen, dass T_f beliebig oft differenzierbar ist, selbst wenn f unstetig ist. Außerdem sollte für $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ gelten $(T_f)' = T_{f'}$. Dazu müssen wir dem Ausdruck

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathscr{D}$$

einen Sinn geben. Benutzt man aber die partielle Integration und dass $\varphi(+\infty) = \varphi(-\infty) = 0$, so ist obiger Ausdruck gleich $-\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Das heißt, anstelle von f differenzieren wir die Testfunktion φ.

Daher ist das Funktional $T_{f'}$ sinnvoll definiert so lange $f\varphi'$ integrierbar ist. Da wir f beliebig oft differenzieren wollen, benötigen wir Testfunktionen φ, die beliebig oft differenzierbar sind, $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Durch die Bedingungen (b) und (c) wird der Testfunktionenraum hinreichend klein.

I.1.2 Der Testfunktionenraum $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

(a) Der Träger einer Funktion und der Raum $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

Definition I.1 Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Als *Träger* von f bezeichnet man die Menge

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}} \quad \text{(Abschluss der Menge).}$$

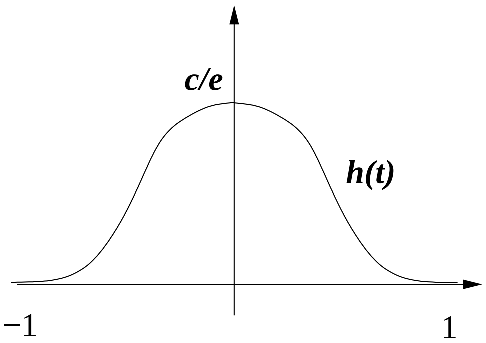
Bemerkung I.1 (a) Der Träger $\operatorname{supp} f$ ist stets abgeschlossen; er ist die kleinste abgeschlossene Menge M, so dass für alle Punkte außerhalb M gilt $f(x) = 0$.
(b) In einer kleinen Umgebung jedes außerhalb des Trägers gelegenen Punktes ist die Funktion identisch Null: $x_0 \not\in \operatorname{supp} f$ genau dann wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f \equiv 0$ in $U_\varepsilon(x_0)$.
(c) Der Träger $\operatorname{supp} f$ ist genau dann kompakt, wenn er beschränkt ist.

Beispiel I.1 (a) $\operatorname{supp} \sin = \operatorname{supp} \tan = \mathbb{R}$.
(b) Es sei $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(1-x)$. Dann gilt $\operatorname{supp} f = [-1,1]$.
(c) Die charakteristische Funktion χ_M hat als Träger $\overline{M}$, den Abschluss von M.
(d) Es sei $g = \chi_{[0,1]}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0,1]$ und $f(x) = 3g(x-10) + 4g\left(\frac{x+4}{2}\right)$. Dann ist $\operatorname{supp} f = [-4,-2] \cup [10,11]$.

Definition I.2 Der Raum der Testfunktionen $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ besteht aus allen C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger:

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} f \text{ ist kompakt}\}.$$

Die Elemente nennt man mitunter auch *finite* Testfunktionen.



Wir wollen uns überlegen, ob es überhaupt von Null verschiedene Testfunktionen gibt. Dazu betrachten wir die sogenannte *Hutfunktion*

$$h(t) = \begin{cases} c\, e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Die Konstante c ist dabei so gewählt, dass $\int_{\mathbb{R}} h(t)\,dt = 1$. Die Funktion h ist stetig auf $\mathbb{R}$. Aus Übungsaufgabe 7.3 folgt, dass h sogar beliebig oft differenzierbar ist mit $h^{(k)}(-1) = h^{(k)}(1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Natürlich ist $\operatorname{supp} h = [-1,1]$. Folglich ist $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ eine Testfunktion. Hieraus folgt, dass die im $\mathbb{R}^n$ gegebene Funktion

$$h(x) = \begin{cases} c_n\, e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \|x\| < 1, \\ 0, & \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

zu $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gehört, wobei ihr Träger die abgeschlossenen Einheitskugel ist. Die Konstante c_n ist so gewählt, dass $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx = \int_{U_1(0)} h(x)\,dx = 1.$

Es sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Dann gilt $\operatorname{supp} h_\varepsilon = \overline{U}_\varepsilon(0)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{U_\varepsilon(0)} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{U_1(0)} h(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Bisher haben wir nur eine einzige Testfunktion aus $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ konstruiert, nämlich $h(x)$ und natürlich die Skalierungen h_ε Mit ihrer Hilfe können wir

(a) den Träger einer beliebigen integrablen Funktion auf ein gegebenes abgeschlossenes Intervall $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ beschränken, indem wir f durch $f h_\varepsilon(x-a)$ ersetzen, welche den Träger in $U_\varepsilon(a)$ hat.

(b) f glätten.

(b) Glättung

Durch Glättung können wir uns einen sehr reichhaltigen Vorrat an Funktionen verschaffen, die den Testfunktionenraum $\mathscr{D}$ für unsere Bedürfnisse groß genug machen. Insbesondere können wir jede integrierbare Funktion in der L^p-Norm durch glatte (C^∞) Funktionen approximieren.
Wir benutzten die Funktion h_ε, für eine von S. L. Sobolev eingeführte Glättungsmethode.

Definition I.3 (a) Es seien $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren das *Faltungsprodukt*, oder einfach die *Faltung*, $f * g$ durch

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = (g*f)(x).$$

Man kann zeigen, dass $f*g(x)$ fast überall $x \in \mathbb{R}^n$ definiert ist und es gilt $\left\|f*g\right\|_{\mathrm{L}^1} \leq \left\|f\right\|_{\mathrm{L}^1}\left\|g\right\|_{\mathrm{L}^1}$.
(b) Wir definieren die *Glättung* f_ε von f durch

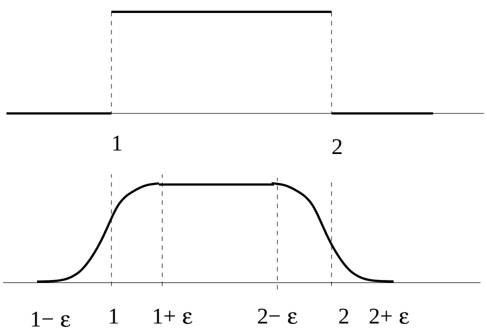
$$f_\varepsilon = f * h_\varepsilon.$$

Man beachte, dass

$$f_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h_\varepsilon(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{U_\varepsilon(x)} h_\varepsilon(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{I.2}$$

Grob gesagt ist $f_\varepsilon(x)$ ein gewichteter Mittelwert von f in der ε-Umgebung von x. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt nämlich für eine in $U_\varepsilon(x_0)$ stetige Funktion f

$$f_\varepsilon(x_0) = \int_{U_\varepsilon(x_0)} f(y)h_\varepsilon(x_0-y)\,\mathrm{d}y = f(\xi)\int_{U_\varepsilon(x_0)} h_\varepsilon(x_0-y)\,\mathrm{d}y = f(\xi)\int_{U_\varepsilon(0)} h_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = f(\xi).$$



Sei etwa $f = \chi_{[1,2]}$. Die Glättung f_ε sieht dann folgendermaßen aus

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < 1-\varepsilon, \\ *, & 1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon, \\ 1, & 1+\varepsilon < x < 2-\varepsilon, \\ *, & 2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon, \\ 0, & 2+\varepsilon < x, \end{cases}$$

wobei der $*$ eine glatte Funktion zwischen 0 und 1 bedeutet.

Lemma I.1 *Wenn* $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, *so* $f_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $n = 1$, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Wir wenden IV.3.2. Satz auf die Funktion $F(y,t) = f(y)h_\varepsilon(t-y)$ an. Da h_ε stetig und beschränkt ist, ist $F(y,t)$ für alle t integrierbar. Für alle fixierten y ist $F(y,t)$ nach t differenzierbar und $\left|F_t(y,t)\right| \le \left|f(y)\right|\left|h'_\varepsilon(t-y)\right|$ ist ebenfalls integrierbar. Somit ist $G(t) = \int_{\mathbb{R}} F(y,t)\,\mathrm{d}y$ differenzierbar und

$$G'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} F(y,t)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} F(y,t)\,\mathrm{d}y.$$

In unserem Falle ist also $f'_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)h'_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y$. Die Existenz der höheren Ableitungen $f_\varepsilon^{(k)}(x)$ folgt analog. ■

Bemerkung I.2 (a) Es gilt $f_\varepsilon \to f$ in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon \to 0$.
(b) $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in L^1 bezüglich der L^1-Norm. Das heißt, für alle $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $g \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger supp g und $\int_{\mathbb{R}^n} \left|f-g\right| \mathrm{d}x < \varepsilon$.

(Beweisidee). (1) Jede L^1-Funktion kann durch L^1 -Funktionen mit kompaktem Träger approximiert werden.
(2) Jede integrable Funktion mit kompaktem Träger kann durch Treppenfunktionen mit kompaktem Träger approximiert werden.
(3) Jede Treppenfunktion mit kompaktem Träger kann approximiert werden durch Treppenfunktionen zu endlich vielen Rechtecken.
(4) Jede charakteristische Funktion von einem Rechteck χ_Q, wobei Q ein abgeschlossenes Rechteck ist, kann durch eine solche Folge von Funktionen mit kompaktem Träger approximiert werden:

$$f_n(x) = \max\{0, n\, d(x,Q)\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei $d(x,Q)$ den Abstand des Punktes x vom Rechteck Q bedeutet. Man beachte, dass f_n gleich 1 ist innerhalb von Q und 0 außerhalb von $U_{1/n}(Q)$. Diese Funktion ist stetig.

(c) $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist dicht.

(c) Konvergenz im Raum $\mathscr{D}$

Notationen. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und einen Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, sei

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \\ \alpha! &= \alpha_1! \cdots \alpha_n! \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\ D^\alpha u(x) &= \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}. \end{aligned}$$

So ist zum Beispiel für $\alpha = (2,0,2)$ und $u \in C^4(\mathbb{R}^3)$, $|\alpha| = 4$ die Ordnung der partiellen Ableitung und $D^\alpha u(x) = u_{x_1 x_1 x_3 x_3}(x)$.
Es ist klar, dass $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ein linearer Raum ist. Wir wollen einen Konvergenzbegriff in $\mathscr{D}$ einführen, der nicht auf eine Norm oder Metrik zurückzuführen ist.

Definition I.4 Eine Folge $(\varphi_k(x))$ von Testfunktionen aus $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *konvergiert* gegen eine Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, falls es

(a) eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ derart gibt, dass $\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq K$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

(b) $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$, gleichmäßig auf K für alle Multiindizes α .

Wir bezeichnen diese Art der Konvergenz durch $\varphi_n \xrightarrow[\mathscr{D}]{} \varphi$.

Für eine stetige Familie $\{\varphi_\varepsilon \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ schreiben wir $\varphi_\varepsilon \xrightarrow[\mathscr{D}]{} \varphi$, für $\varepsilon \to 0$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, falls für alle Folgen $\varepsilon_k \to 0$ für $k \to \infty$ gilt $\varphi_{\varepsilon_k} \xrightarrow[\mathscr{D}]{} \varphi$ für $k \to \infty$ im Raum $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel I.2 Es sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\varphi \neq 0$ eine fixierte Testfunktion; wir betrachten eine Folge $(\varphi_k(x))$ von Testfunktionen, die wie folgt definiert sind:
(a) $\varphi_k(x) = \left(\dfrac{\varphi(x)}{k}\right)$. Diese Folge konvergiert punktweise und gleichmäßig und auch in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ gegen Null. Es ist $\operatorname{supp} \varphi_k = \operatorname{supp} \varphi$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es konvergieren alle Ableitungen gleichmäßig gegen 0. Folglich ist $\varphi_k \xrightarrow[\mathscr{D}]{} 0$.
(b) $\varphi_k(x) = \dfrac{\varphi(x/k)}{k}$. Diese Folge konvergiert nicht gegen 0 in $\mathscr{D}$, da für den Träger der Funktion φ_k gilt $\operatorname{supp}(\varphi_k) = k \operatorname{supp}(\varphi)$, $k \in \mathbb{N}$, diese sind in keiner gemeinsamen kompakten Menge enthalten.
(c) $\varphi_k(x) = \dfrac{\varphi(kx)}{k}$. Diese Folge konvergiert gleichmäßig gegen 0 auf $\mathbb{R}$, da $\frac{|\varphi(kx)|}{k} \leq C/k$ mit $C = \sup \left|\varphi(y)\right|$. Ist jedoch $0 \in \operatorname{supp} \varphi$ und $\varphi''(0) \neq 0$, so konvergieren die zweiten Ableitungen $\varphi_k'(x) = \varphi'(kx)$, $\varphi_k''(x) = k\varphi_k''(kx)$ nicht einmal punktweise bei $x_0 = 0$. Also gilt $\varphi_k \not\xrightarrow[\mathscr{D}]{} 0$.

Man beachte, dass es keine Metrik in $\mathscr{D}$ gibt, für die obige Art der Folgenkonvergenz mit der Konvergenz im metrischen Raum übereinstimmte.

I.2 Die Distributionen $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$

Definition I.5 Eine *Distribution* (oder verallgemeinerte Funktion) ist ein stetiges lineares Funktional auf dem Testfunktionenraum $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Dabei heißt das lineare Funktional T *stetig* auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, falls für alle Folgen (φ_k), $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, die in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gegen eine Funktion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ konvergieren, $\varphi_k \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} \varphi$, gilt $T(\varphi_k) \to T(\varphi)$ in $\mathbb{C}$.
Die Menge der Distributionen auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir mit $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ oder kurz mit $\mathscr{D}'$.

Die Auswertung einer Distribution auf $T \in \mathscr{D}'$ auf einer Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}$ bezeichnen wir mit $T(\varphi)$ oder mit $\langle T, \varphi \rangle$. Zwei Distributionen T_1 und T_2 sind genau dann gleich, wenn $T_1(\varphi) = T_2(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}$.

Bemerkung I.3 (Charakterisierung der Stetigkeit) (a) Ein lineares Funktional T auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig, genau dann, wenn aus $\varphi_k \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} 0$ folgt, dass $T(\varphi_k) \to 0$ in $\mathbb{C}$. Das heißt, die Stetigkeit in 0 genügt bereits für die globale Stetigkeit. Es ist klar, dass die Stetigkeit, die Stetigkeit in 0 impliziert. Sei nun $\varphi_k \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} \varphi$. Dann ist $(\varphi_k - \varphi) \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} 0$ und somit $T(\varphi_k - \varphi) \to 0$ für $k \to \infty$. Wegen der Linearität von T folgt hieraus $T(\varphi_k) \to T(\varphi)$ und T ist stetig.
(b) Ein lineares Funktional T auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann stetig, wenn

$$\forall \underset{K \text{ kompakt}}{K \subset \mathbb{R}^n} \; \exists C > 0 \; \exists l \in \mathbb{N}_0 \; \forall \underset{\operatorname{supp}\varphi \subset K}{\varphi \in \mathscr{D}} : \quad \left| T(\varphi) \right| \leq C \cdot \sup_{x \in K, |\alpha| \leq l} \left| D^\alpha \varphi(x) \right|. \tag{I.3}$$

Wir beweisen, dass dieses Kriterium (I.3) tatsächlich die Stetigkeit von T zur Folge hat. Sei dazu $\varphi_k \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} 0$ für $k \to \infty$. Dann existiert eine gemeinsame kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{supp}\varphi_k \subseteq K$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Kriterium gibt es eine Konstante $C > 0$ und ein $l \in \mathbb{Z}_+$ mit $\left| T(\varphi_k) \right| \leq C \sup \left| D^\alpha \varphi_k(x) \right|$, wobei das Supremum über alle $x \in K$ und über alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq l$ genommen wird. Da $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0$ gleichmäßig auf K für alle α, erhalten wir insbesondere $\sup \left| D^\alpha \varphi_k(x) \right| \longrightarrow 0$ für as $k \to \infty$. Dies beweist $T(\varphi_k) \to 0$ und somit ist T stetig.
Der Beweis der anderen Richtung ist etwa in [5, Satz 4.4, S. 55]. Wenn es eine konstante, von K unabhängige kleinste derartige Zahl $l \in \mathbb{N}$ gibt, so nennt man l die *Ordnung* der Distribution T.
(c) $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Raum.

I.2.1 Reguläre Distributionen

Eine große Klasse von Distributionen aus $\mathscr{D}'$ werden durch gewöhnliche Funktionen f über die Korrespondenz $f \leftrightarrow T_f$ gegeben, die definiert ist durch $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Dabei suchen wir eine möglichst viele Funktionen f, für die die rechte Seite noch erklärt ist.

Definition I.6 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *lokal-integrierbar*, falls f über jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist. Die Menge der lokal-integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ oder kurz $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

$$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \quad f \text{ ist messbar und } \forall \underset{K \text{ ist kompakt}}{K \subset \mathbb{R}^n} : \int_K \left| f \right| \mathrm{d}x < \infty\}.$$

Beispiel I.3 (a) $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$
(b) $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist nicht lokal-integrierbar $f \notin \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, da $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = +\infty$ – f ist über der kompakten Menge $[0,1]$ nicht integrierbar.

Bemerkung I.4 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
(b) Für jedes $R > 0$ gilt $f \in \mathrm{L}^1(U_R(0))$.
(c) Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $f \in \mathrm{L}^1(U_\varepsilon(x_0))$.

Lemma I.2 (Definition) *Es sei $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ lokal-integrierbar. Dann ist $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution.*
Wenn es zur Distribution T eine lokal-integrierbare Funktion $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ gibt mit $T = T_g$, so heißt T regulär. *Andernfalls heißt T* singulär.

Beweis. Zunächst ist T_f ein lineares Funktional auf $\mathscr{D}$, denn der Multiplikationsoperator $\varphi \mapsto f\varphi$ ist linear und die Integration ein lineares Funktional.
Wir zeigen die Stetigkeit mittels (I.3): Sei dazu $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Wir setzen $C = \int_K \left| f \right| \mathrm{d}x$ und $l = 0$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset K$:

$$\left| T_f\left(\varphi\right) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_K \left| f(x) \right| \left| \varphi(x) \right| \mathrm{d}x \le \sup_{x \in K} \left| \varphi(x) \right| \int_K \left| f(x) \right| \mathrm{d}x = C \sup_{x \in K} \left| \varphi(x) \right|,$$

wobei $C = \int_K \left| f \right| \mathrm{d}x < \infty$ existiert, da $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Damit ist die Bedingung (I.3) mit $l = 0$ erfüllt — T_f ist stetig und damit $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. ∎

Beispiel I.4 Es sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Dann ist
(a) $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ regulär mit $f(x) = 1$, $T = T_f$.
(b) $T(\varphi) = \int_{-1}^{2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ ist regulär mit $f(x) = \chi_{[-1,2]}$ und $T = T_f$.
(c) $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 1 \cdot \varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} 1' \cdot \varphi(x) = 0$. Also ist $T = 0$ regulär mit $f = 0$.
(d) $T(\varphi) = \int_0^{\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(0)$ ist nicht regulär, wie wir unten sehen werden.

Lemma I.3 (Du Bois–Reymond/ Fundamentallemma der Variationsrechnung) *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Es sei $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $T_f\left(\varphi\right) = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit* $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$.
Dann ist $f = 0$ fast überall in Ω.

Beweis. Wir betrachten der Einfachheit halber nur $n = 1$ und $\Omega = (-\pi, \pi)$. Sei ε mit $0 < \varepsilon < \pi$ fixiert. Ferner sei $\varphi_k(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} h_\varepsilon(x)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\operatorname{supp} \varphi_k \subset [-\pi, \pi]$. Da sowohl e^x als auch $h_\varepsilon(x)$ zu $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ gehören, gilt $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ und

$$c_k = T_f\left(\varphi_k\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} h_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Das heißt, alle Fourierkoeffizienten von $f h_\varepsilon \in \mathrm{L}^2[-\pi,\pi]$ verschwinden. Wegen der Parsevalschen Gleichung folgt hieraus $f h_\varepsilon = 0$ in $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$. Daraus folgt, dass $f h_\varepsilon = 0$ f. ü. in $(-\pi,\pi)$. Da $h_\varepsilon > 0$ auf $(-\pi,\pi)$ folgt $f = 0$ f. ü. auf $(-\pi,\pi)$. ■

Bemerkung I.5 Das obige Lemma zeigt, dass die Zuordnung $f \mapsto T_f$ injektiv ist. In der Tat, seien f_1 und f_2 lokal integrierbar und $T_{f_1} = T_{f_2}$. Dann folgt $f_1 = f_2$ f. ü.; also ist die Abbildung injektiv. Daher können wir über diese Abbildung $f \mapsto T_f$ die lokal-integrierbaren Funktionen einbetten in den Raum der Distributionen.

I.2.2 Andere Beispiele für Distributionen

Lemma I.4 (Definition) *Für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und fixiertes $a \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die δ-*Distribution δ_a *über*

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a).$$

Dann gilt $\delta_a \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und δ_a ist singulär.

Beweis. Die Linearität von δ_a ist unmittelbar klar. Wir müssen die Stetigkeit zeigen. Dazu sei $\varphi_k \xrightarrow[\mathscr{D}]{} 0$; insbesondere gilt punktweise $\varphi_k(x) \to 0$ für alle x. Also gilt insbesondere $\delta_a(\varphi_k) = \varphi_n(a) \to 0$ für $k \to \infty$. Somit ist δ_a stetig und damit $\delta_a \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Wir benutzen mitunter auch die Bezeichnung $\delta(x-a)$ für δ_a und δ für δ_0 bzw. $\delta(x)$.
Der Einfachheit halber sei $a = 0$. Wir zeigen indirekt, dass δ singulär ist. Angenommen, es gibt eine Funktion $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass $\delta = T_f$. Dann gilt $\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.
1. Beweis. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, die die 0 nicht enthält. Angenommen, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$. Insbesondere ist wegen $0 \notin \operatorname{supp}\varphi$, $\varphi(0) = 0$. Das bedeutet, dass $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung ist dann $f = 0$ f. ü. in Ω. Da Ω eine beliebige offene Menge war, die den Ursprung nicht enthält, gilt $f = 0$ f. ü. in $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ und damit $f = 0$ f. ü. in $\mathbb{R}^n$. Das bedeutet aber, dass $T_f = 0$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Es ist aber $\delta \neq 0$ — ein Widerspruch.
2. Beweis. Wegen $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit

$$d := \int_{U_\epsilon(0)} \left| f(x) \right| \mathrm{d}x < 1.$$

Setzt man $\varphi(x) = h(x/\varepsilon)$ mit der Hutfunktion h, so gilt $\operatorname{supp}\varphi = \overline{U_\varepsilon(0)}$ und $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\varphi(x)\right| = \varphi(0) > 0$, sodass

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \sup \left|\varphi(x)\right| \int_{U_\varepsilon(0)} \left| f(x) \right| \mathrm{d}x = \varphi(0) d < \varphi(0).$$

Dies widerspricht aber $\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left|\varphi(0)\right| = \varphi(0)$. ■

Analog kann man zeigen, dass

$$T(\varphi) = D^\alpha \varphi(a), \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

eine singuläre Distribution aus $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert.
Die Distribution

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}},$$

kann regulär oder singulär sein, was von Eigenschaften von f abhängt.
Da durch T_f, $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ bzw. δ_a Masseverteilungen oder Ladungsverteilungen definiert werden können, nannte L. Schwartz diese Objekte Distributionen (Verteilungen).

I.2.3 Konvergenz in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$

Definition I.7 Eine Folge (T_k), $T_k \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, *konvergiert* gegen $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, falls für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} T_k(\varphi) = T(\varphi).$$

Wir schreiben in diesem Fall $\lim_{k\to\infty} T_k = T$. Analog heißt die stetige Familie T_ε, $\varepsilon > 0$, von Distributionen aus $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *konvergent* gegen $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon \to 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon = T$, falls für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(\varphi) = T(\varphi)$.

Mit diesem Konvergenzbegriff ist $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ ein vollständiger Raum, siehe auch [7, p. 39].
Mit Hilfe dieses Konvergenzbegriffs gibt es viele Möglichkeiten, die singuläre Distribution δ durch eine Folge regulärer Distributionen zu approximieren.

Beispiel I.5 Es sei $f = \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$ und $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ die Skalierung von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gilt also, $f_\varepsilon = 1/(2\varepsilon)\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$. Wir zeigen, dass $T_{f_\varepsilon} \to \delta$ für $\varepsilon \to 0$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
Beweis. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$T_{f_\varepsilon}(\varphi) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}\varphi\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon\varphi(\xi_\varepsilon) = \varphi(\xi_\varepsilon),$$

wobei $\xi_\varepsilon \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ eine geeignete Zahl dieses Intervalls ist. Da φ stetig bei 0 ist, konvergiert $\varphi(\xi_\varepsilon)$ gegen $\varphi(0)$ für $\varepsilon \to 0$, denn ξ_ε geht gegen 0 für $\varepsilon \to 0$. Also ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_{f_\varepsilon}(\varphi) = \varphi(0) = \delta(\varphi).$$

Das zeigt die Konvergenz gegen δ. ■

Das folgende Lemma verallgemeinert dieses Beispiel.

Lemma I.5 *Es sei $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir die skalierte Funktion $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.*
Dann gilt $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} T_{f_\varepsilon} = \delta$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Beweis. Nach Variablentransformation $y = x/\varepsilon$ erhalten wir $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$ für alle $\varepsilon > 0$. Zum Beweis der Aussage müssen wir für alle $\varphi \in \mathscr{D}$ zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\varphi(0)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } \varepsilon \to 0;$$

oder, äquivalent dazu,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (\varphi(x) - \varphi(0))\, \mathrm{d}x \right| \longrightarrow 0, \qquad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Mit obiger Variablentransformation, $y = \frac{x}{\varepsilon}$, $\mathrm{d}x = \varepsilon\, \mathrm{d}y$ geht das obige Integral über in

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} f(y)(\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0))\, \varepsilon\, \mathrm{d}y \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(y)(\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0))\, \mathrm{d}y \right|.$$

Da φ bei 0 stetig ist, ist für alle fixierten y, die Familie von Funktionen $(\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0))$ konvergent gegen 0 für $\varepsilon \to 0$. Daher geht auch die Familie von Funktionen, $g_\varepsilon(y) = f(y)(\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0))$ punktweise gegen 0. Mehr noch, g_ε hat eine integrable Majorante $2C\left|f\right|$, wobei $C = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\varphi(x)\right|$. Nach Lebesgues Theorem über die majorisierte Konvergenz (IV.2.10. Satz) sind Limes und Integral vertauschbar, daher ist auch der Limes der Integrale für $\varepsilon \to 0+0$ gleich Null.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left|f(y)\right| \left|\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)\right| \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left|f(y)\right| \lim_{\varepsilon \to 0} \left|\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)\right| \mathrm{d}y = 0.$$

■

Die folgenden lokal integrierbaren Funktionenfamilien approximieren δ für $\varepsilon \to 0$.

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi \varepsilon x^2} \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}, \qquad f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \tag{I.4}$$

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\varepsilon^2}}, \qquad h_\varepsilon(x)$$

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$$

Alle Familien sind die Skalierungen von $f(x) = f_1(x)$. Die ersten vier Familien erfüllen die Bedingung des Lemmas $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}x = 1$, die letzte jedoch nicht, da $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ nicht in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ liegt. Das Lemma gilt aber auch für uneigentliche Riemann-Integrale mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = 1$.

I.2.4 Die Distribution $\mathscr{P}\,\frac{1}{x}$

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht lokal integrierbar, da $\int_{[0,1]} \frac{\mathrm{d}x}{x} = +\infty$. Daher existiert T_f als reguläre Distribution nicht. Jedoch können wir einen Ersatz für T_f definieren, der außerhalb der Null mit $\int_K \frac{\varphi(x)}{x}\, \mathrm{d}x$ überein stimmt, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq K$, $0 \notin K$.
Zur Erinnerung: Der *Cauchysche Hauptwert* eines uneigentlichen Riemann-Integrals mit einer Polstelle des Integranten ist definiert wie folgt:
Die Funktion $f\colon [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ habe eine Singularität bei $c \in [a,b]$. Dann ist

$$\mathrm{Vp} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b \right) f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Man beachte, dass das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ definiert ist als Summe *zweier* unabhängiger Limiten: $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\eta\to 0}\int_{c+\eta}^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Beim Cauchyschen Hauptwert werden beide Grenzwerte gekoppelt. So gilt z.B. $\mathrm{Vp}\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n+1}} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, wogegen das uneigentliche Riemann-Integral $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ nicht definiert ist (und ebenso das Lebesgue-Integral).

Lemma I.6 (Definition) *Für* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R,R]$, *setzen wir*

$$F(\varphi) = \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Dann ist F wohldefiniert, linear und stetig auf $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Wir bezeichnen diese Distribution mit $\mathscr{P}\,\frac{1}{x}$.

Beweis. Es sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R,R]$. Wir definieren eine Hilfsfunktion $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}, & x \neq 0 \\ \varphi'(0), & x = 0. \end{cases}$$

Da φ bei 0 differenzierbar ist, gilt $\psi \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$. Da $\frac{1}{x}$ eine ungerade Funktion ist, ist $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R}\psi(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Da ψ stetig ist, existiert das obige Integral.
Wir zeigen die Stetigkeit von F. Nach dem Taylorschen Lehrsatz ist, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\xi_x)$ für einen geeigneten Wert ξ_x zwischen x und 0. Also ist

$$\begin{aligned} \left|F(\varphi)\right| &= \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right)\frac{\varphi(0)+x\varphi'(\xi_x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_{-R}^{R}\left|\varphi'(\xi_x)\right|\,\mathrm{d}x \leq 2R\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\varphi'(x)\right|. \end{aligned}$$

Somit ist die Bedingung (I.3) aus Bemerkung I.3 erfüllt. mit $C = 2R$ und $l = 1$, so dass F ein stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ ist und somit eine Distribution der Ordnung 1, $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. ∎

In der Quantenmechanik sind die sogenannten *Sochotzskyschen* Formeln von Interesse, siehe auch [8, S. 76]. Eine Anwendung findet man etwa in der Quantenchromodynamik, `http://deposit.ddb.de/cgi-bin/dokserv?idn=959860754&dok_var=d1&dok_ext=pdf&filename=`

In $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} T_{\frac{1}{x+\varepsilon \mathrm{i}}} = -\pi\mathrm{i}\delta + \mathscr{P}\,\frac{1}{x},$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} T_{\frac{1}{x-\varepsilon \mathrm{i}}} = \pi\mathrm{i}\delta + \mathscr{P}\,\frac{1}{x}.$$

Beweisidee: Man zeige, dass für die Summe und die Differenz der beiden obigen Formeln gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} T_{\frac{2x}{x^2+\varepsilon^2}} = 2\mathscr{P}\,\frac{1}{x}, \quad \lim_{\varepsilon\to 0+0} T_{\frac{-2\mathrm{i}\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}} = -2\pi\mathrm{i}\delta.$$

Der zweite Grenzwert folgt sofort aus (I.4). Wir zeigen die erste Formel.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $\lim_{\varepsilon\to 0} T_{\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}} - \mathscr{P}\,\frac{1}{x} = 0$, also dass für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathrm{Vp}\int_{-R}^{R} \left(\frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} - \frac{\varphi(x)}{x}\right) \mathrm{d}x \to 0, \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Vp}\int_{-R}^{R} \frac{-\varepsilon^2\varphi(x)}{x(x^2+\varepsilon^2)}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Mittels Taylorentwicklung $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\xi_x)$ und der Tatsache, dass $\varphi(0)/(x(x^2+\varepsilon^2))$ eine ungerade Funktion ist, so dass $\mathrm{Vp}\int_{\mathbb{R}} \varphi(0)/(x(x^2+\varepsilon^2))\,\mathrm{d}x = 0$, folgt

$$\varepsilon^2\mathrm{Vp}\int_{-R}^{R} \left|\frac{\varphi(0)+x\varphi'(\xi_x)}{x(x^2+\varepsilon^2)}\right| \mathrm{d}x = \varepsilon^2\mathrm{Vp}\int_{-R}^{R} \frac{\left|\varphi'(\xi_x)\right|}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x \le \varepsilon^2 \sup\left|\varphi'\right| \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\varepsilon^2} = C\varepsilon^2\,\frac{\pi}{\varepsilon} = C\pi\varepsilon.$$

Diese Term geht für $\varepsilon \to 0$ gegen 0. ■

I.2.5 Rechnen mit Distributionen

Distributionen zeichnen sich dadurch aus, dass man mit ihnen mitunter einfacher rechnen kann als mit Funktionen. Wir wollen daher die üblichen Operationen mit Funktionen, wie Addition, Multiplikation, Differentiation, Tensorprodukt, Faltung, Fouriertransformation usw. von Funktionen auf Distributionen übertragen. Unser *Allgemeines Prinzip* ist dabei immer dasselbe: Für reguläre Distributionen sollen die für Funktionen bekannten Begriffe heraus kommen. Es soll also gelten (unter den notwendigen Voraussetzungen an f und g):

$$(T_f)' = T_{f'}, \quad \mathscr{F}(T_f) = T_{\mathscr{F}f}, \quad T_f * T_g = T_{f*g}, \ldots$$

Wir wissen bereits, dass man Distributionen aus $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ addieren und skalar vervielfachen kann, denn $\mathscr{D}'$ ist ein linearer Raum.

(a) Multiplikation

Es gibt leider keine Multiplikation $T_1 T_2$ zweier Distributionen untereinander. Jedoch können wir ein Produkt $a\cdot T = T\cdot a$, $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ für $a \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ definieren. Was geschieht nämlich im Falle einer regulären Distribution $T = T_f$, wenn man $a\, T_f = T_{af}$ fordert?

$$T_{af}\left(\varphi\right) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x) f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, a(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = T_f\left(a\,\varphi\right). \tag{I.5}$$

Es gilt, dass $a\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ liegt, denn $a \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ und φ hat kompakten Träger. Somit hat auch $a\varphi$ kompakten Träger. Also definiert die rechte Seite von (I.5) ein lineares Funktional auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Definition I.8 Für $a \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir $a\,T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$a\,T\left(\varphi\right) = T\left(a\varphi\right)$$

und nennen $a\,T$ das *Produkt* von a und T.

Wir müssen noch die Stetigkeit zeigen. Angenommen, $\varphi_k \xrightarrow[\mathscr{D}]{} 0$, dann gilt $a\varphi_k \xrightarrow[\mathscr{D}]{} 0$ für $k \to \infty$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von T $\lim_{k\to\infty} T\left(a\varphi_k\right) = 0$; also ist $a\,T$ stetig.

Beispiel I.6 (a) $x\mathscr{P}\,\frac{1}{x} = T_1$. Tatsächlich gilt für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$x\mathscr{P}\,\frac{1}{x}\left(\varphi\right) = \mathscr{P}\,\frac{1}{x}\left(x\varphi(x)\right) = \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = T_1\left(\varphi\right).$$

(b) Wenn $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann

$$f(x)\delta_a\left(\varphi\right) = \delta_a\left(f(x)\varphi(x)\right) = f(a)\varphi(a) = f(a)\delta_a\left(\varphi\right).$$

Also gilt $f(x)\delta_a = f(a)\delta_a$.
(c) Man beachte, dass diese Multiplikation nicht assoziativ ist, denn es gilt

$$(\delta\cdot x)\mathscr{P}\,\frac{1}{x} \underset{\text{(b)}}{=} 0\cdot\mathscr{P}\,\frac{1}{x} = 0, \quad \delta\left(x\cdot\mathscr{P}\,\frac{1}{x}\right) \underset{\text{(a)}}{=} \delta\cdot T_1 = 1\cdot\delta = \delta.$$

(b) Differentiation

Wir betrachten vorerst nur den Fall $n = 1$. Es sei $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ eine stetig-differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$, also erst recht $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Insbesondere definieren T_f und $T_{f'}$ reguläre Distributionen.
Es sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset (-R, R)$, so dass $\varphi(-R) = \varphi(R) = 0$. Wir definieren $(T_f)' := T_{f'}$. Partielle Integration liefert dann

$$\begin{aligned} T_{f'}\left(\varphi\right) &= \int_{-R}^{R} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\varphi(x)\Big|_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-R}^{R} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -T_f\left(\varphi'\right), \end{aligned}$$

Wobei wir $\varphi(-R) = \varphi(R) = 0$ benutzten. Folglich gilt es für stetig-differenzierbares f, $T'_f(\varphi) = -T_f(\varphi')$ zu definieren. Diese Identität nehmen wir als Rechtfertigung für die allgemeine Definition der partiellen Ableitung $D^\alpha T$.

Definition I.9 Für $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und einen Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definieren wir $D^\alpha T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ über

$$D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\, T(D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

Die Linearität von D^α ist klar, wir müssen die Stetigkeit zeigen. Dazu sei $\varphi_k \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} 0$ für $k \to \infty$. Nach Definition ist dann auch $D^\alpha \varphi_k \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} 0$ (gleichmäßige Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}^n$). Da T stetig ist, gilt $T(D^\alpha \varphi_k) \to 0$ für $k \to \infty$. Somit ist $D^\alpha T(\varphi_n) \to 0$; $D^\alpha T$ ist daher ein stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und gehört somit zu $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Man beachte, dass hier, bei der Stetigkeit der Differentiation, zum ersten Mal benutzt wird, dass bei der Folgenkonvergenz in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ alle Ableitungen gleichmäßig konvergieren müssen. Man beachte, dass Distributionen, partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzen.

Lemma I.7 *Es sei $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist*
(a) *die Differentiation $D^\alpha\colon \mathscr{D}' \to \mathscr{D}'$ eine stetiger linearer Operator auf $\mathscr{D}'$, das heißt, wenn $T_k \to T$ in $\mathscr{D}'$ so folgt $D^\alpha T_k \to D^\alpha T$ in $\mathscr{D}'$ für $k \to \infty$.*
(b)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a\,T) = \frac{\partial a}{\partial x_i}T + a\frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad \textit{(Produktregel für partielle Ableitungen).}$$

(c) *Für beliebige zwei Multiindizes α und β gilt*

$$D^{\alpha+\beta}T = D^\alpha(D^\beta T) = D^\beta(D^\alpha T) \quad \textit{(Schwarzsches Lemma).}$$

Beweis. (a) Angenommen $T_k \to T$ für $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'$, das heißt, für alle $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt $T_k(\psi) \to T(\psi)$. Insbesondere gilt dies für $\psi = D^\alpha \varphi$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Also gilt

$$(-1)^{|\alpha|}D^\alpha T_n(\varphi) = T_n(D^\alpha \varphi) \longrightarrow T(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha T(\varphi).$$

Da dies für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt, folgt die Behauptung.
(b) Es sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a\frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) &= \frac{\partial T}{\partial x_i}(a\,\varphi) = -T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(a\varphi)\right) \\ &= -T\left(a_{x_i}(x)\varphi\right) - T\left(a\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -a_{x_i}T(\varphi) - aT\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \\ &= -a_{x_i}T(\varphi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(aT)(\varphi) = \left(-a_{x_i}T + \frac{\partial}{\partial x_i}(aT)\right)(\varphi). \end{aligned}$$

Streicht man auf beiden Seiten das Argument φ, so erhält man die Behauptung.
(c) Der Beweis verläuft ähnlich wie in (a) und (b) und benutzt $D^{\alpha+\beta}\varphi = D^\alpha(D^\beta \varphi)$ für $\varphi \in \mathscr{D}$.
■

Man beachte, dass die Differentiation $\mathrm{d}\colon C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ oder im Hilbertraum $\mathrm{d}\colon C^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ nicht stetig ist.

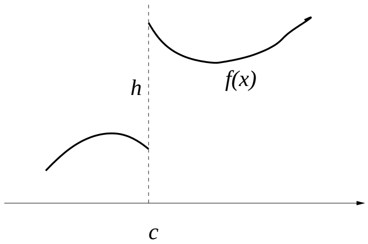
Beispiel I.7 (a) Es sei $a \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$D^\alpha \delta_a\left(\varphi\right) = (-1)^{|\alpha|}\delta_a\left(D^\alpha \varphi\right) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(a)$$
$$D^\alpha T_f\left(\varphi\right) = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Die sogenannte *Heavisidefunktion* $H(x)$ ist definiert als charakteristische Funktion der positiven Halbachse, $H = \chi_{(0,+\infty)}$. Offensichtlich ist sie lokal integrierbar, T_H ist daher eine reguläre Distribution. Wir berechnen die Ableitung $(T_H)' \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$:

$$T_H'\left(\varphi\right) = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \varphi(x)'\,\mathrm{d}x = -\varphi(x)\Big|_0^\infty = \varphi(0) = \delta\left(\varphi\right).$$

Also gilt $T_H' = \delta$.



(c) Wir verallgemeinern diese Beispiel. Sei $f(x)$ differenzierbar auf $G = \mathbb{R}\setminus\{c\} = (-\infty, c) \cup (c, \infty)$ mit einer Sprungstelle bei c

Die Ableitung von T_f in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ ist dann

$$T_f' = T_{f'} + h\delta_c, \quad \text{wobei} \quad h = f(c+0) - f(c-0) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}(f(c+\varepsilon) - f(c-\varepsilon)),$$

die Sprunghöhe von f bei c ist. Tatsächlich gilt für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
T_f'\left(\varphi\right) &= -T_f(\varphi') = -\left(\int_{-\infty}^c + \int_c^\infty\right) f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -f(c-0)\varphi(c) + f(c+0)\varphi(c) + \left(\int_{-\infty}^c + \int_c^\infty\right) f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left((f(c+0) - f(c-0))\delta_c + T_{f'(x)}\right)\left(\varphi\right) \\
&= \left(h\,\delta_c + T_{f'}\right)\left(\varphi\right).
\end{aligned}$$

(d) Wir zeigen, dass $f(x) = \ln|x|$ zu $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ gehört, siehe ÜA Serie 8.2, und berechnen die Ableitung in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Beweis. Da f auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig ist, genügt es zu zeigen, dass f in einer Umgebung von 0 integrierbar ist. Da das Integral

$$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x \underset{x=\mathrm{e}^t,\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{=} \int_{-\infty}^0 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t\Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -1$$

als uneigentliches Riemannintegral (oder Lebesgueintegral) existiert, ist $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ und somit existiert die reguläre Distribution $T_{\ln|x|}$.

Wir zeigen, dass $T_f' = \mathscr{P}\,\frac{1}{x}$.

Es sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq (-R,R)$. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\int_{-R}^{R} = \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}$; also kann man auf der rechten Seite auch zum Limes $\varepsilon \to 0$ über gehen und erhält nach wie vor $\int_{-R}^{R}$. Nach Definition der Ableitung ist

$$\begin{aligned} T'_{\ln|x|}(\varphi(x)) &= -T_{\ln|x|}(\varphi'(x)) = -\int_{-R}^{R} \ln|x|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\left(\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right) \ln|x|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

Wegen $\left|\int_{-1}^{1} \ln|x|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\right| < \infty$, konvergiert das mittlere Integral $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \ln|x|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ für $\varepsilon \to 0$ gegen Null; dies gilt erneut aufgrund des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, angewandt auf die stetige Funktionenfamilie $g_\varepsilon(x) = \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x)\ln|x|\,\varphi'(x)$, die punktweise gegen 0 geht und durch die integrierbare Funktion $\ln|x|\,\varphi'(x)$ majorisiert wird.
Wir berechnen das dritte Integral mittels partieller Integration: Unter Beachtung von $\varphi(+R) = 0$ haben wir

$$\int_{\varepsilon}^{R} \ln x\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \ln x\,\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{R} - \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\varepsilon\,\varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Analog hat man

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \ln(-x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\ln\varepsilon\,\varphi(-\varepsilon) - \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Die Summe der beiden Ausdrücke ergibt

$$\ln\varepsilon\,\varphi(\varepsilon) - \ln\varepsilon\,\varphi(-\varepsilon) - \left(\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right).$$

Der integralfreie Term konvergieren gegen 0 für $\varepsilon \to 0$, da $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \varepsilon\ln\varepsilon = 0$. Der andere konvergiert gegen $-\mathscr{P}\,\frac{1}{x}(\varphi)$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\ln\varepsilon\,\varphi(\varepsilon) - \ln\varepsilon\,\varphi(-\varepsilon)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon\,\frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon}\,2\varepsilon = 2\varphi'(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon = 0.$$

Folglich ist

$$T'_f(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right) \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathscr{P}\,\frac{1}{x}(\varphi).$$

■

(c) Konvergenz von Folgen und Fourier-Reihen

Zur Erinnerung: Eine Funktionenfolge (f_k) konvergiert auf K *gleichmäßig* gegen eine Funktion f, wenn

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,k(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\,k \geq k(\varepsilon)\ \forall\,x \in K\colon \left|f_k(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Bemerkung I.6 Wichtige Sätze zur gleichmäßigen Konvergenz.

(a) Wenn (f_k) auf K gleichmäßig gegen f konvergiert und f_k ist stetig für alle k, dann ist f stetig auf K.

(b) Wenn f_k auf K gleichmäßig gegen f konvergiert und f_k ist Riemann-integrierbar auf K für alle k, dann ist auch f Riemann-integrierbar auf K und $\lim_{k\to\infty}\int_K f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_K f(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Wenn f_k differenzierbar ist auf K und (f_k') konvergiert gleichmäßig auf K gegen g, dann konvergiert auch (f_k) gleichmäßig gegen ein f auf K und $f' = g$.

(d) **Kriterium von Weierstraß**. Es sei (f_k) eine Funktionenfolge auf K und (c_k), $c_k \geq 0$, eine reelle Zahlenfolge mit

1. $\left|f_k(x)\right| \leq c_k$ für alle k und für alle $x \in K$.
2. $\sum_k c_k < \infty$.

Dann konvergiert $\sum_k f_k$ gleichmäßig auf K gegen eine Funktion f.

(e) Definition. Die Funktionenfolge (f_k) konvergiert auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *lokal-gleichmäßig* gegen eine Funktion f, wenn für alle kompakten Teilmengen $K \subset \Omega$ die Funktionenfolge auf K gleichmäßig gegen f konvergiert.

Lemma I.8 *Es sei (f_k) eine Folge lokal-integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die auf $\mathbb{R}^n$ lokal-gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert.*
(a) Dann gilt $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $T_{f_k} \to T_f$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.
(b) Für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt: $D^\alpha T_{f_k} \to D^\alpha T_f$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. (a) Es sei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$; wir zeigen, dass $f \in \mathrm{L}^1(K)$. Da f_k auf K gleichmäßig gegen f konvergiert, ist nach (b) (siehe oben) f auf K integrierbar, also $\int_K f\,\mathrm{d}x < \infty$ und außerdem $\lim_{k\to\infty}\int_K f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_K f\,\mathrm{d}x$.
Wir zeigen die Konvergenz $T_{f_k} \to T_f$ in $\mathscr{D}'$. Es sei $\varphi \in \mathscr{D}$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_k\cdot\varphi)$ auf K und erneut wegen (b) haben wir

$$\lim_{k\to\infty} T_{f_k}(\varphi) = \lim_{k\to\infty}\int_K f_k(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_K \left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_K f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = T_f(\varphi).$$

Da dies für alle $\varphi \in \mathscr{D}$ gilt, folgt $T_{f_k} \to T_f$ in $\mathscr{D}'$.
(b) Nach Lemma I.7 (a), ist die Differentiation in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine stetige Operation. Folglich haben wir $D^\alpha T_{f_k} \to D^\alpha T_f$ für $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'$. ∎

Beispiel I.8 (a) Es sei (c_n) eine komplexe Zahlenfolge und $a, b > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ seien derart gegeben, dass $|c_n| \leq a|n|^m + b$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, das heißt, die Folge (c_n) ist *polynomial beschränkt.* Dann konvergiert die Fourierreihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

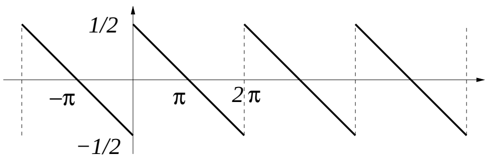
Beweis. Wir betrachten zunächst die $(m+2)$fach „integrierte" Reihe

$$\frac{c_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{c_n}{(n\mathrm{i})^{m+2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}. \tag{I.6}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\left|\frac{c_n}{(n\mathrm{i})^{m+2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right| = \left|\frac{c_n}{(n\mathrm{i})^{m+2}}\right| \leq \frac{a|n|^m + b}{|n|^{m+2}} \leq \frac{\tilde{a}}{|n|^2}.$$

Wegen $\sum_{n\neq 0} \frac{\tilde{a}}{|n|^2} < \infty$, konvergiert die Reihe (I.6) gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ nach dem Kriterium von Weierstraß, Bemerkung I.6 (c). Nach Lemma I.8, konvergiert die Reihe (I.6) dann auch in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ und kann beliebig oft gliedweise differenziert werden. Die $(m+2)^{\text{te}}$ Ableitung von (I.6) ist genau die gegebene Fourierreihe. ■



Die 2π-periodische Funktion $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}$, $x \in [0, 2\pi)$ hat bei $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ Sprungstellen der Höhe 1, denn es ist $f(0+0) - f(0-0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Daher gilt für die Ableitung in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$

$$T'_{f(x)} = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}.$$

dabei ist $-\frac{1}{2\pi}$ die klassische Ableitung des differenzierbaren Anteils von f. Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Wegen der Vollständigkeit des Orthonormalsystems $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$, stimmen f und $g(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ als Funktionen im $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ überein; das heißt, $\int_0^{2\pi} \left|f - g\right|^2 = 0$. Somit gilt $f = g$ f. ü. auf $[0, 2\pi]$ und damit auch f. ü. auf $\mathbb{R}$. Somit sind f und g als lokal-integrierbare Funktionen gleich. Folglich stimmen die zugehörigen regulären Distributionen in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ überein: $T_f = T_g$.

$$T_f = T_{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}} \quad \text{in} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Nach Lemma I.8 kann die Reihe gliedweise beliebig oft differenziert werden, man erhält stets eine in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ gültige Identität. Nach Beispiel I.7 erhalten wir als erste Ableitung:

$$T_{f'} = T_{-\frac{1}{2\pi}} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} T_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}} \quad \text{in} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Bringt man $-\frac{1}{2\pi}$ noch auf die rechte Seite, so erhält man

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}.$$

(b) $x^m T = 0$**.** Es sei $a(x) = x^m$. Eine Lösung der Gleichung $a \cdot T = 0$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ ist

$$T = \sum_{n=0}^{m-1} c_n \delta^{(n)}, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Nach ÜA 8.2 gilt für alle $\varphi \in \mathscr{D}$ und für alle $n = 0, \ldots, m-1$

$$a \cdot \delta^{(n)}\left(\varphi\right) = (-1)^n \delta\left((x^m \varphi(x))^{(n)}\right) = (-1)^n \left.(x^m \varphi(x))^{(n)}\right|_{x=0} = 0;$$

Also erfüllt das obige T die Gleichung $aT = 0$. Man kann sogar zeigen, dass dies die einzigen Lösungen von $aT = 0$ sind, siehe etwa [8, p. 84].
(c) Die allgemeine Lösung der gDGl $u^{(m)} = 0$ in $\mathscr{D}'$ stimmt mit der klassischen Lösung überein, es ist $u = T_p$ mit einem Polynom p vom Grad $m-1$.
Beweis. Wir beweisen dies nur für $m = 1$. Wir zeigen also, dass $T' = 0$ als einzige Lösung in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ die konstante reguläre Distribution hat, $T = cT_1$. Der allgemeine Fall $m > 1$ folgt mit Hilfe von vollständiger Induktion über m.
Sei also $T' = 0$. Das heißt, für alle $\psi \in \mathscr{D}$ gilt $0 = T'\left(\psi\right) = -T\left(\psi'\right)$. Insbesondere gilt für $\varphi, \eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, dass

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi(t) - d\eta(t)\right) \mathrm{d}t, \quad \text{wobei} \quad d = T_1\left(\varphi\right) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{d}x,$$

zu $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ gehört, da sowohl φ als auch η Testfunktionen sind. Dabei ist η eine Hilfsfunktion. Wegen $T\left(\psi'\right) = 0$ und $\psi' = \varphi - d\,\eta$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= T\left(\psi'\right) = T\left(\varphi - d\eta\right) = T\left(\varphi\right) - T\left(\eta\right) T_1\left(\varphi\right) \\ &= T\left(\varphi\right) - cT_1\left(\varphi\right) = (T - cT_1)\left(\varphi\right), \end{aligned}$$

wobei $c = T\left(\eta\right)$. Da dies für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt, erhalten wir $0 = T - cT_1$ bzw. $T = cT_1$, was die Behauptung beweist. ■

I.3 Tensor Produkt und Faltung von Distributionen

I.3.1 Der Träger einer Distribution

Wir hatten bereits betont, dass man nicht vom „Wert einer Distribution T am Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$" reden kann.

Definition I.10 Es sei $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Wir sagen, dass T *in* x_0 *verschwindet*, $T(x_0) = 0$, falls es ein $\varepsilon > 0$ derart gibt, dass $T\left(\varphi\right) = 0$ für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq U_\varepsilon(x_0)$. Wir sagen, dass die Distributionen T und T im Punkte x_0 *gleich sind*, $T(x_0) = S(x_0)$, wenn $T - S$ in x_0 verschwindet.

Es gilt: $T = S$ genau dann, wenn $T(x_0) = S(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Das heißt, sind zwei Distributionen *lokal gleich* in allen Punkten, so stimmen sie auch global überein.
Aus der Definition folgt: Die Menge $\mathrm{n}(T)$ der Punkte des $\mathbb{R}^n$, in denen T verschwindet, ist offen, denn wenn T in x_0 verschwindet, also $T(\varphi) = 0$ für alle Testfunktionen mit Träger in $U_\varepsilon(x_0)$, dann verschwindet T auch in allen Punkten von $U_\varepsilon(x_0)$.

Definition I.11 Es sei $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt die Menge $\operatorname{supp} T := \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{n}(T)$ der *Träger* der Distribution T. Der Träger besteht also aus allen $x \in \mathbb{R}^n$ wo T nicht verschwindet, also

$$\operatorname{supp} T = \{x \mid \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),\ \operatorname{supp} \varphi \subset U_\varepsilon(x) \quad \text{und} \quad T\left(\varphi\right) \neq 0\}.$$

Bemerkung I.7 (a) Nach Definition ist $\operatorname{supp} T$ abgeschlossen. Für beliebige lokal integrierbare Funktionen gilt jedoch $\operatorname{supp} T_f \subset \operatorname{supp} f$. Wir zeigen: $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} f \subset \mathrm{n}(T_f)$. Sei x_0 nicht im Träger von f. Nach Bemerkung I.1 (b) gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, wo $f \equiv 0$. Dann gilt aber für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset U_\varepsilon(x_0)$

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{U_\varepsilon(x_0)} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ist f stetig, dann gilt $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$;
(b) $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$, das heißt, δ_a verschwindet in jedem Punkt $b \neq a$. Tatsächlich gibt es zu b die Umgebung $U_{|b-a|/2}$, so das für alle $\varphi \in \mathscr{D}$ gilt mit Träger in $U_{(b-a)/2}$, dass $\delta_a(\varphi) = \varphi(a) = 0$. Ferner ist $\operatorname{supp} T_H = [0, +\infty)$ und $\operatorname{supp} T_{\chi_{\mathbb{Q}}} = \varnothing$.

I.3.2 Das Tensorprodukt

(a) Tensorprodukt von Funktionen

Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ und $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ gegeben. Dann ist das *Tensorprodukt* $f \otimes g\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C}$ definiert über $f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$, $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.
Sind $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, $k = 1, \ldots, r$, dann bezeichnen wir die Funktion $\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^r \varphi_k(x)\psi_k(y)$ die auf $\mathbb{R}^{n+m}$ definiert ist, durch $\varphi = \sum_k \varphi_k \otimes \psi_k$. Die Menge solcher Linearkombinationen $\sum_{k=1}^r \varphi_k \otimes \psi_k$ bezeichnen wir mit $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Dies ist wieder ein linearer Raum. Aus der Differenzierbarkeit von φ_k und ψ_k folgt die Differenzierbarkeit von φ, $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$.
Seien ferner $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $K_2 \subset \mathbb{R}^m$ die gemeinsamen Träger der Familie von Funktionen $\{\varphi_k\}$ bzw. $\{\psi_k\}$. Dann ist $\operatorname{supp} \varphi \subset K_1 \times K_2$. Da K_1 als auch K_2 beschränkt sind, ist auch $K_1 \times K_2$ beschränkt. Also ist $\operatorname{supp} \varphi$ kompakt und somit gilt $\varphi(x, y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Daher gilt

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathscr{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m}).$$

Darüber hinaus ist $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ ein *dichter* Teilraum von $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Das heißt, dass für jedes $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ natürliche Zahlen m, $r_m \in \mathbb{N}$ existieren und Testfunktionen $\varphi_{mk} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi_{mk} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, sodass

$$\sum_{k=1}^{r_m} \varphi_{mk} \otimes \psi_{mk} \xrightarrow[\mathscr{D}]{} \eta \qquad \text{für } m \to \infty.$$

(b) Das Tensorprodukt von Distributionen

Definition I.12 Es seien $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ Distributionen. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Distribution $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ sodass für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$

$$F(\varphi \otimes \psi) = T(\varphi)S(\psi).$$

Diese Distribution F bezeichnen wir mit $T \otimes S$.

Klar ist, dass $T \otimes S$ ein auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ definiertes stetiges, lineares Funktional ist. Da $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ liegt, lässt es sich eindeutig zu einem stetigen linearen Funktional auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ fortsetzen; $(T \otimes S)(\sum_{k=1}^r \varphi_k \otimes \psi_k) = \sum_{k=1}^r T(\varphi_k)S(\psi_k)$. So ist zum Beispiel für $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ das Tensorprodukt $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$. Denn es gilt für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, dass

$$(\delta_a \otimes \delta_b)(\varphi \otimes \psi) = \varphi(a)\psi(b) = (\varphi \otimes \psi)(a,b) = \delta_{(a,b)}(\varphi \otimes \psi).$$

Lemma I.9 *Es sei $F = T \otimes S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ das Tensorprodukt der Distributionen $T \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $S \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ und $\eta = \eta(x,y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$.*
Dann ist für alle fixierten $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die von $y \in \mathbb{R}^m$ abhängige Funktion $\eta(x_0,y)$ eine Testfunktion aus $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Für jedes x_0 in $\mathbb{R}^n$ ist also die Zahl $\varphi(x_0) := S\left(\eta(x_0,\cdot)\right)$ erklärt. Diese Zuordnung $x_0 \mapsto \varphi(x_0)$ ist eine Testfunktion aus $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.
Analog ist $\psi(y) := T\left(\eta(\cdot,y)\right)$ eine Testfunktion aus $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ und es gilt

$$(T \otimes S)(\eta) = S\left(T(\eta)\right) = T\left(S(\eta)\right).$$

Beweis. (Beweisidee aus [8, II.7, S. 94 ff]) Die Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist wohldefiniert und hat (wie η) einen kompakten Träger. Wir zeigen die Stetigkeit in $a \in \mathbb{R}^n$. Dazu sei $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ eine gegen a konvergente Folge. Wegen der Stetigkeit von η gilt dann:

$$\eta(x_k,y) \xrightarrow[\mathscr{D}]{} \eta(a,y) \quad \text{im Raum } \mathscr{D}(\mathbb{R}^m) \text{ für } k \to \infty\,.$$

Wegen der Stetigkeit von S auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ folgt weiter

$$\varphi(x_k) = S(\eta(x_k,\cdot)) \to S(\eta(a,\cdot) = \varphi(a), \quad k \to \infty.$$

Analoges gilt für ψ. ∎

Beispiel I.9 (a) *Tensorprodukt regulärer Distributionen.* Es seien $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Dann ist $f \otimes g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+m})$ und $T_f \otimes T_g = T_{f\otimes g}$. Nach Fubinis Theorem ist nämlich, für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$

$$(T_f \otimes T_g)\left(\varphi \otimes \psi\right) = T_f\left(\varphi\right)\ T_g\left(\psi\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \int\limits_{\mathbb{R}^m} g(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)g(y)\varphi(x)\psi(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} f \otimes g(x,y)\,\varphi \otimes \psi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = T_{f\otimes g}\left(\varphi \otimes \psi\right).$$

(b) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, $\eta = \eta(x,y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Dann gilt $\delta_{x_0} \otimes S\big(\eta\big) = S\big(\eta(x_0,\cdot)\big)$. In der Tat ist für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$

$$\delta_{x_0} \otimes S\left(\varphi \otimes \psi\right) = \delta_{x_0}\left(\varphi\right) S\left(\psi\right) = \varphi(x_0) S\left(\psi\right) = T\left(\varphi(x_0)\psi(y)\right).$$

Insbesondere gilt

$$(\delta_a \otimes T_g)(\eta) = \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\eta(a,y)\,\mathrm{d}y.$$

Insbesondere gilt für $S = \delta_{y_0}$, dass $\delta_{x_0} \otimes \delta_{y_0} = \delta_{(x_0,y_0)}$.
(c) Für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\beta \in \mathbb{N}_0^m$ gilt,

$$D^{\alpha+\beta}(T \otimes S) = (D_x^\alpha T) \otimes (D_y^\beta S) = D^\beta((D^\alpha T) \otimes S) = D^\alpha(T \otimes D^\beta S).$$

Beweis für den Fall $n = m = 1$. Es seien $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(T \otimes S)(\varphi \otimes \psi) &= -(T \otimes S)\left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi \otimes \psi)\right) \\
&= -(T \otimes S)(\varphi' \otimes \psi) = -T(\varphi')S(\psi) = T'(\varphi)S(\psi) \\
&= (T' \otimes S)(\varphi \otimes \psi).
\end{aligned}$$

I.3.3 Die Faltung

Motivation: Kennt man die Fundamentallösung $\mathscr{E} \in \mathscr{D}'$ eines linearen partiellen Differentialoperators L, also $L[\mathscr{E}] = \delta$, so kann man sofort die inhomogene PDGl $L[u] = f$ mit beliebiger rechter Seite f lösen, und zwar ist $u = \mathscr{E} * f$, wobei $*$ die Faltung der Distribution und der Funktion f bezeichnet. Für Funktionen in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ war das Faltungsprodukt bereits in Definition I.3 gegeben. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
\left\|f * g\right\|_{\mathrm{L}^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|f * g(x)\right| \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\right| \mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left|f(x-y)\right| \left|g(y)\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(y)\right| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x-y)\right| \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(y)\right| \left\|g\right\|_{\mathrm{L}^1} \mathrm{d}y = \left\|f\right\|_{\mathrm{L}^1} \left\|g\right\|_{\mathrm{L}^1}.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $f * g(x)$ fast überall auf $\mathbb{R}^n$ endlich.

(a) Faltung von Funktionen

Das Grundproblem bei der Faltung ist, dass die Faltung zweier Testfunktionen i. a. nicht wieder eine Testfunktion zu sein braucht — der Träger der Faltung muss nicht mehr kompakt sein. Selbst wenn f und g lokal integrierbar sind, braucht $f * g$ nicht mehr lokal integrierbar zu sein. In den folgenden drei Fällen jedoch, geht bei $f * g$ alles gut

1. Mindestens eine der beiden Funktionen f und g hat kompakten Träger.
2. Der Träger beider Funktionen f und g liegt in $[0, +\infty)$.
3. Beide Funktionen liegen in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

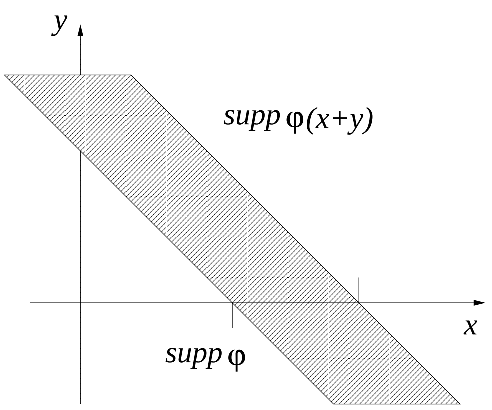
In diesem Fall ist die Faltung $(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$ auch über $\mathbb{R}$ integrierbar (s. o.). Die Faltung ist dann ein kommutatives, assoziatives Produkt auf $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) Die Faltung von Distributionen

Wir folgen unserem *Allgemeinen Prinzip* um zunächst die Faltung von regulären Distributionen zu studieren. Dazu seien $f, g, f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
Wir fordern, dass $T_f * T_g = T_{f*g}$. Für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ist dann,

$$\begin{aligned} T_{f*g}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\underset{t=x-y}{=} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(y)g(t)\varphi(y+t)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = T_{f\otimes g}(\tilde{\varphi}), \end{aligned} \tag{I.7}$$

wobei $\tilde{\varphi}(y,t) = \varphi(y+t)$.



Es gibt zwei Schwierigkeiten zu überwinden:
(a) Im Allgemeinen ist $\tilde{\varphi}$ is *keine* Testfunktion, da ihr Träger in $\mathbb{R}^{2n}$ unbeschränkt ist. Es ist $(y,t) \in \operatorname{supp}\tilde{\varphi}$, falls $y + t = c \in \operatorname{supp}\varphi$, was eine Familie von Geraden ergibt, die parallel verlaufen und einen unendlichen Streifen beschreiben.
(b) Das Integral existiert nicht. Das zweite Problem wird gelöst, indem wir als zusätzliche Bedingungen fordern, dass die Menge

$$K_\varphi = \{(y,t) \in \mathbb{R}^{2n} \mid y \in \operatorname{supp} T_f,\ t \in \operatorname{supp} T_g, \\ y + t \in \operatorname{supp}\varphi\}$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ **beschränkt** ist. Dann existiert auch das Integral (I.7).

Das Problem (a) wird gelöst, indem die Funktion $\tilde{\varphi}$ geeignet „abgeschnitten" wird. Wir definieren

$$T_{f*g}(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (T_f \otimes T_g)(\varphi(y+t)\eta_k(y,t)),$$

wobei $\eta_k \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} 1$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ für $k \to \infty$. Eine solche Testfunktionenfolge η_k existiert. Sei etwa $\eta(y,t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ gegeben durch $\eta(y,t) = 1$ für $\left\|y\right\|^2 + \|t\|^2 \le 1$. Setzt man dann für $k \in \mathbb{N}$,

$$\eta_k(y,t) = \eta\left(\frac{y}{k}, \frac{t}{k}\right),$$

dann ist $\eta_k(y,t) = 1$ für alle $\left\|y\right\|^2 + \|t\|^2 \le k$. Es gilt $\lim_{k\to\infty} \eta_k(y,t) = 1$ für alle $(y,t) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Definition I.13 Es seien $T, S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und wir setzten voraus, dass für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ die Menge

$$K_\varphi := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x + y \in \operatorname{supp}\varphi,\ x \in \operatorname{supp} T,\ y \in \operatorname{supp} S\}$$

beschränkt ist. Definiere

$$T * S(\varphi) = \lim_{k\to\infty} T \otimes S\left(\varphi(x+y)\eta_k(x,y)\right). \tag{I.8}$$

Dann ist $T * S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und heißt *Faltung* der Distributionen T und S.

Bemerkung I.8 (a) Die Folge (I.8) wird für große k stationär, so dass der Grenzwert existiert. Es sei nämlich $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ fixiert, dann ist K_φ beschränkt. Folglich gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\eta_k(x,y) = 1$ für alle $x, y \in K_\varphi$ und alle $k \geq k_0$. Also verändert sich $\varphi(x+y)\eta_k(x,y)$ nicht für $k \geq k_0$.
(b) Der Grenzwert ist stetig auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.
(c) Der Grenzwert hängt nicht von der speziellen Wahl der Funktion η ab.

Bemerkung I.9 (Eigenschaften der Faltung) (a) Hat eine der Distributionen S oder T einen kompakten Träger, dann existiert $T * S$. Möge etwa $\operatorname{supp} T$ kompakt sein. Dann folgt aus $x + y \in \operatorname{supp}\varphi$ und $x \in \operatorname{supp} T$, dass $y \in \operatorname{supp}\varphi - \operatorname{supp} T = \{y_1 - y_2 \mid y_1 \in \operatorname{supp}\varphi, y_2 \in \operatorname{supp} T\}$. Folglich gilt für $(x,y) \in K_\varphi$, dass

$$\left\|(x,y)\right\| \leq \|x\| + \left\|y\right\| \leq \|x\| + \left\|y_1\right\| + \left\|y_2\right\| \leq 2C + D$$

wenn $\operatorname{supp} T \subset U_C(0)$ und $\operatorname{supp}\varphi \subset U_D(0)$. Also ist K_φ beschränkt für alle φ.
(b) Wenn $S * T$ existiert, so auch $T * S$ und $S * T = T * S$.
(c) Wenn $T * S$ existiert, so auch $D^\alpha T * S$, $T * D^\alpha S$ und $D^\alpha(T * S)$, und alle drei Terme stimmen überein:

$$D^\alpha(T * S) = D^\alpha T * S = T * D^\alpha S.$$

Beweis. Wir beschränken uns wieder auf den Fall $m = n = 1$. und $D^\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Sei dazu $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, dann ist

$$\begin{aligned}
(T * S)'(\varphi) &= -T * S\left(\varphi'\right) = -\lim_{k\to\infty} T \otimes S\left(\varphi'(x+y)\eta_k(x,y)\right) \\
&= -\lim_{k\to\infty} T \otimes S\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(x+y)\eta_k(x,y)\right) - \varphi(x+y)\frac{\partial \eta_k}{\partial x}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} T' \otimes S\left(\varphi(x+y)\eta_k(x,y)\right) - \lim_{k\to\infty} T \otimes S\left(\varphi(x+y) \underbrace{\frac{\partial \eta_k}{\partial x}}_{=0 \text{ für große } k}\right) \\
&= T' * S(\varphi)
\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt benutzen wir die Kommutativität des Tensorproduktes und der Faltung. ∎

Man beachte, dass die Existenz von $S * T$ wichtig ist, denn es gilt

$$T_H' * T_1 = \delta * T_1 = T_1 \quad \text{aber} \quad T_H * T_1' = T_H * 0 = 0.$$

(d) Es sei $\operatorname{supp} S$ kompakt und $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $\psi(y) = 1$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} S$. Dann gilt:

$$(T * S)(\varphi) = T \otimes S\big(\varphi(x+y)\psi(y)\big), \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

(e) Wenn $T_1, T_2, T_3 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ alle kompakten Träger haben, dann existieren $T_1 * (T_2 * T_3)$ und $(T_1 * T_2) * T_3$ und sind gleich: $T_1 * (T_2 * T_3) = (T_1 * T_2) * T_3$.

I.3.4 Lineare Variablentransformation

Es sei $y = Ax + b$ eine reguläre lineare Variablentransformation, d. h. A ist eine reguläre (d.h. invertierbare) $n \times n$-Matrix. Wir wenden unser *Allgemeines Prinzip* an und fordern für reguläre Distributionen T_f die bekannte Transformationsregel für Gebietsintegrale gilt: Sei f lokal integrierbar und $\tilde{f}(x) = f(Ax+b)$ mit $y = Ax+b$, $x = A^{-1}(y-b)$, $\mathrm{d}y = |\det A|\,\mathrm{d}x$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
T_{\tilde{f}}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(Ax+b)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(A^{-1}(y-b))\frac{1}{|\det A|}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{|\det A|} T_{f(y)}\big(\varphi(A^{-1}(y-b))\big).
\end{aligned}$$

Definition I.14 Es sei $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, A eine reguläre $n \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann bezeichnet $T(Ax+b)$ die Distribution

$$T(Ax+b)\big(\varphi(x)\big) := \frac{1}{|\det A|} T(y)\big(\varphi(A^{-1}(y-b))\big).$$

Zum Beispiel ist für $T = T(x)$, und alle $b \in \mathbb{R}^n$ $T(x-b)\big(\varphi(x)\big) = T\big(\varphi(x+b)\big)$, insbesondere, $\delta(x-b) = \delta_b$, denn

$$\delta(x-b)\big(\varphi(x)\big) = \delta(x)\big(\varphi(x+b)\big) = \varphi(0+b) = \varphi(b) = \delta_b(\varphi).$$

Beispiel I.10 (a) Für alle $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt $\delta * S = S * \delta = S$. Die Existenz der Faltung ist klar, da δ kompakten Träger hat. Für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt daher

$$\begin{aligned}
(\delta * S)(\varphi) &= \lim_{k\to\infty} \delta(x) \otimes S(y)\big(\varphi(x+y)\eta_k(x,y)\big) \\
&= \lim_{k\to\infty} S(y)\big(\varphi(y)\eta_k(0,y)\big) = S(\varphi)
\end{aligned}$$

(b) $\delta_a * S = S(x-a)$. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
(\delta_a * S)(\varphi) &= \lim_{k\to\infty} \delta_a \otimes S\big(\varphi(x+y)\eta_k(x,y)\big) \\
&= \lim_{k\to\infty} S(y)\big(\varphi(a+y)\eta_k(a,y)\big) = S(y)\big(\varphi(a+y)\big) = S(y-a)(\varphi).
\end{aligned}$$

M. a. W., die Faltung mit δ verändert eine Distribution nicht (δ ist das Einselement bezüglich der Faltung), die Faltung mit δ_a bewirkt eine Verschiebung um a.
Insbesondere ist $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.
(c) Es sei $\varrho \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und supp T_f sei kompakt. Dann gilt

Fall $n=2$. Sei $f(x)=\ln\frac{1}{\|x\|}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Dann heißt

$$V_2(x)=(\varrho*f)(x)=\iint_{\mathbb{R}^2}\varrho(y)\ln\frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}y$$

logarithmisches (oder Flächenpotenzial) mit der Dichte ϱ.

Fall $n\ge 3$. Sei $f(x)=\frac{1}{\|x\|^{n-2}}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt

$$V_n(x)=(\varrho*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\varrho(y)\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}y$$

Newtonsches Potenzial (oder Volumenpotenzial) mit der Dichte ϱ.

Wir werden später sehen, dass $\Delta V_n=-(n-2)\omega_n\varrho$ für $n\ge 3$, wobei ω_n die Oberfläche der $(n-1)$-Sphäre ist und dass $\Delta V_2=-2\pi\varrho$.

(d) Für alle $\alpha>0$ und $x\in\mathbb{R}$ sei $f_\alpha(x)=\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$. Dann gilt $f_\alpha*f_\beta=f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Man zeige zunächst, dass $\int f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x=1$ und benutze dann quadratische Ergänzung.

I.3.5 Fundamentallösungen

Es sei $L[u]$ ein linearer partielle Differentialoperator auf $\mathbb{R}^n$,

$$L[u]=\sum_{|\alpha|\le k}c_\alpha(x)D^\alpha u, \tag{I.9}$$

wobei die $c_\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ glatte Koeffizienten sind.

Definition I.15 Eine Distribution $\mathscr{E}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt *Fundamentallösung* des Differentialoperators L aus (I.9), wenn

$$L[\mathscr{E}]=\delta\quad\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Man beachte, dass eine Fundamentallösung $\mathscr{E}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ in der Regel nicht eindeutig bestimmt ist. Nach einem allgemeinen Resultat von Malgrange und Ehrenpreis (1952) gilt, dass jeder lineare partielle Differentialoperator mit *konstanten Koeffizienten* eine Fundamentallösung besitzt.

(a) Gewöhnliche DGl

Wir beginnen mit einem einführenden Beispiel aus den gDGl (ÜA, Serie 9).

Lemma I.10 *Es sei $u=u(x)$, $u\in C^\infty(\mathbb{R})$, die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems*

$$u^{(m)}(x)+a_1(x)u^{(m-1)}(x)+\cdots+a_m(x)u(x)=0,$$
$$u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(m-2)}(0)=0,\quad u^{(m-1)}(0)=1.$$

Für die reguläre Distribution $\mathscr{E}=T_{Hu}$ gilt dann

$$\mathscr{E}^{(m)}+a_1\mathscr{E}^{(m-1)}+\cdots+a_m\mathscr{E}=\delta, \tag{I.10}$$

in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, das heißt, $L[\mathscr{E}]=\delta$ und $\mathscr{E}$ ist eine Fundamentallösung von L.

Beweis. Mit der Leibniz-Regel, (Lemma I.7 (b)), Beispiel I.6 (b) und $u(0)=0$ folgt

$$\mathscr{E}'=(T_H)'u+T_H u'=\delta\, u+T_{Hu'}=u(0)\delta+T_{Hu'}=T_{Hu'}.$$

Analog erhält man

$$\mathscr{E}''=T_{Hu''},\quad \dots\quad ,\mathscr{E}^{(m-1)}=T_{Hu^{(m-1)}},\quad \mathscr{E}^{(m)}=u^{(m-1)}(0)\delta+T_{Hu^{(m)}}=\delta+T_{Hu^{(m)}}.$$

Setzt man dies alles in die linke Seite von (I.10) ein, so hat man

$$L[\mathscr{E}]=\mathscr{E}^{(m)}+a_1\mathscr{E}^{(m-1)}+\dots+a_m\mathscr{E}=T_{H\,L[u]}+\delta=T_0+\delta=\delta.$$

■

Beispiel I.11 Die folgenden linearen Differentialgleichungen haben die regulären Fundamentallösungen $\mathscr{E}=T_E$, wobei

$$y'+ay=0,\qquad E(x)=H(x)\mathrm{e}^{-ax},$$

$$y''+a^2y=0,\qquad E(x)=H(x)\frac{\sin ax}{a}.$$

(b) Partielle Differentialgleichungen

Hier liegt das Hauptanwendungsfeld der Fundamentallösung: Wenn $\mathscr{E}$ eine Fundamentallösung von L ist, dann hat man durch Faltung mit der rechten Seite f eine Lösung der inhomogenen Gleichung $L[u]=f$, $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Theorem I.11 *Es sei $L[u]=\sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha D^\alpha u$ ein linearer partieller Differentialoperator im $\mathbb{R}^n$ mit konstanten Koeffizienten c_α und $\mathscr{E}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ sei eine Fundamentallösung von L. Sei ferner $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution, so dass die Faltung $S=\mathscr{E}*f$ existiert.*
Dann gilt $L[S]=f$ in $\mathscr{D}'$. M. a. W., es ist S eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. $L[u]=f$.
In der Menge der Distributionen aus $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, für die die Faltung mit $\mathscr{E}$ definiert ist, ist S die einzige Distribution mit $L[S]=f$.

Beweis. Nach Bemerkung I.9 (b) gilt

$$L[S]=\sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha D^\alpha(\mathscr{E}*f)=\sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha D^\alpha(\mathscr{E})*f=L(\mathscr{E})*f=\delta*f=f.$$

Angenommen, S_1 und S_2 sind beides Lösungen, also $L[S_1]=L[S_2]=f$. Dann ist

$$\begin{aligned}S_1-S_2&=(S_1-S_2)*\delta=(S_1-S_2)*\sum_{|\alpha|\le k}c_\alpha D^\alpha\mathscr{E}=\sum_{|\alpha|\le k}(S_1-S_2)*D^\alpha(c_\alpha\mathscr{E})=\\&=\sum_{|\alpha|\le k}D^\alpha(S_1-S_2)*c_\alpha\mathscr{E}=\sum_{|\alpha|\le k}(c_\alpha D^\alpha S_1-c_\alpha D^\alpha S_2)*\mathscr{E}=(L[S_1]-L[S_2])*\mathscr{E}=(f-f)*\mathscr{E}=0.\end{aligned}\tag{I.11}$$

In der dritten Gleichung benutzten wir, dass die c_α konstant sind und in der vierten Gleichung, dass $S_1*\mathscr{E}$ und $S_2*\mathscr{E}$ existieren. ■

I.4 Fouriertransformation in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

Wir wollen die Fouriertransformation von Distributionen definieren. Dazu wollen wir sie erst einmal auf dem Testfunktionenraum erklären. Sei also $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Dann ist die Fouriertransformierte

$$\mathscr{F}\varphi(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(x)\,dx$$

von φ eine reell-analytische Funktion, die auf der ganzen reellen Achse holomorph ist. Insbesondere hat $\widehat{\varphi}$ *keinen* kompakten Träger mehr. Es gilt sogar, dass $\mathscr{D}$ und $\mathscr{F}(\mathscr{D})$ nur die Nullfunktion gemeinsam haben.
Um dieses Problem, $\mathscr{D} \cap \mathscr{F}(\mathscr{D}) = \{0\}$, zu lösen, wird der Testfunktionenraum $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ vergrößert, so dass $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ und dass $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ invariant unter der Fouriertransformation ist, also $\mathscr{F}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma I.12 *Es sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Dann ist die Fouriertransformierte $g(z) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}} e^{-itz}\varphi(t)\,dt$ holomorph in der ganzen komplexen Ebene und in jeder Halbebene $H_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \le a\}$, $a \in \mathbb{R}$, beschränkt.*

Beweis. (a) Wir zeigen, dass der komplexe Grenzwert $\lim_{h\to 0}(g(z+h) - g(z))/h$ für alle $z \in \mathbb{C}$ existiert. In der Tat ist

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \alpha_n \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} \frac{e^{-iht} - 1}{h} \varphi(t)\,dt.$$

Wegen $\left| e^{-izt} \frac{e^{-iht}-1}{h} \varphi(t) \right| \le C$ für alle $x \in \operatorname{supp}(\varphi)$, $h \in \mathbb{C}$, $|h| \le 1$, können wir Lebesgues Theorem über die majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \alpha_n \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} \lim_{h\to 0} \frac{e^{-iht} - 1}{h} \varphi(t)\,dt = \alpha_n \int_{\mathbb{R}} e^{-izt}(-it)\varphi(t)\,dt = \mathscr{F}(-it\varphi(t)).$$

(b) Sei nun $\operatorname{Im}(z) \le a$. Dann gilt

$$\left| g(z) \right| \le \alpha_n \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-it\operatorname{Re}(z)} \right| e^{t\operatorname{Im}(z)} \varphi(t)\,dt \le \alpha_n \sup_{t\in K} \left| \varphi(t) \right| \int_K e^{ta}\,dt,$$

wobei K eine kompakte Menge ist, die $\operatorname{supp}\varphi$ enthält. ■

I.4.1 Der Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Definition I.16 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge der glatten Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass für alle Multiindizes α und β gilt:

$$p_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\beta D^\alpha f(x) \right| < \infty.$$

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt *Schwartzraum* oder Raum der „schnell-fallenden Funktionen“.

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta : p_{\alpha,\beta}(f) < \infty\}.$$

Schwartzraumfunktionen fallen für $\|x\| \to \infty$ schneller gegen Null als jede rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$. Und das gilt auch für alle Ableitungen. Anstelle von $p_{\alpha,\beta}$ benutzen wir auch die Halbnormen

$$p_{k,l}(\varphi) = \sum_{|\alpha|\le k,\, |\beta|\le l,} p_{\alpha,\beta}(\varphi), \quad k,l \in \mathbb{Z}_+.$$

Der Schwartzraum ist ein linearer Raum und $p_{\alpha,\beta}$ sind Normen auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt $e^{ax} \notin \mathscr{S}(\mathbb{R})$ aber $e^{-\|x\|^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
Der Schwartzraum ist sogar eine Algebra, das heißt, das Produkt $f \cdot g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, falls $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Die Leibnizregel für höhere Ableitungen sichert nämlich, dass $p_{kl}(\varphi \cdot \psi) < \infty$. So ist etwa $f(x) = p(x)e^{-ax^2+bx+c}$, $a > 0$ für alle Polynome p und alle $a > 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Da $g(x) = e^{-|x|}$ bei 0 nicht differenzierbar ist, gehört g nicht zum Schwartzraum.

Konvergenz in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Definition I.17 Es seien $\varphi_k, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir sagen, dass die Folge (φ_k) in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gegen φ konvergiert, symbolisch $\varphi_n \underset{\mathscr{S}}{\longrightarrow} \varphi$, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen für alle Multiindizes α und β erfüllt ist:

$$\begin{aligned} p_{\alpha,\beta}(\varphi - \varphi_k) &\longrightarrow 0; \\ x^\beta D^\alpha(\varphi - \varphi_k) &\rightrightarrows 0, \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n; \\ x^\beta D^\alpha \varphi_k &\rightrightarrows x^\beta D^\alpha \varphi, \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Bemerkung I.10 (a) In der Quantenmechanik werden Orts- und Impulsoperatoren auf dem Schwartzraum definiert wie folgt: Q_k und P_k, $k = 1, \dots, n$ sind gegeben durch

$$(Q_k\varphi)(x) = x_k\varphi(x), \quad (P_k\varphi)(x) = -i\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

Unter P_k bzw. Q_k ist der Schwartzraum invariant, das heißt, für alle $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $x^\beta D^\alpha \varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
(b) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.
Man beachte, dass eine rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ über $[1, +\infty)$ integrierbar ist, wenn $q(x) \neq 0$ für alle $x \ge 1$ und $\deg q \ge \deg p + 2$. Dann ist nämlich $\dfrac{C}{x^2}$ eine obere Schranke von f, die integrierbar ist.
Dies wollen wir für den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Problem: Unter welcher Bedingung an m ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + \|x\|^2)^m} < \infty.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, ist $x = r\,y$, wobei $r = \|x\|$ und $y = \frac{x}{\|x\|}$ ein Einheitsvektor ist, der auf der Einheitssphäre S^{n-1} liegt. Man kann das n-dimensionale Gebietsintegral auch schreiben als iteriertes Integral über dr und über dS, wobei dS das $n-1$-dimensionale Flächenelement der Sphäre S^{n-1} ist.

$$dx_1\, dx_2 \cdots dx_m = r^{n-1}\, dr\, dS.$$

Mit dieser Formel und mit Fubinis Theorem hat man

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{(1+\|x\|^2)^m} = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \frac{r^{n-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}S}{(1+r^2)^m} = \omega_{n-1} \int_0^\infty \frac{r^{n-1}\,\mathrm{d}r}{(1+r^2)^m},$$

wobei ω_{n-1} das $(n-1)$-dimensionale Maß der Einheitssphäre ist Nach dem oben genannten Kriterium ist das Integral endlich, wenn $2m-n+1>1$ bzw. wenn $m>n/2$. Insbesondere ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{1+\|x\|^{n+1}} < \infty.$$

Im Falle $n=1$ ist dieses Integral gleich π.
Nach obigem ist also

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\varphi(x)\right| \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|(1+\|x\|^{2n})\varphi(x)\right| \frac{\mathrm{d}x}{1+\|x\|^{2n}} \\ &\leq C\,p_{0,2n}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{1+\|x\|^{2n}} < \infty.\end{aligned}$$

Folglich ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
(c) $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; Für eine Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt $p_{\alpha,\beta}(\varphi) < \infty$, denn dass Supremum einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge ist endlich. Der Schwartzraum ist echt größer als $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ denn $f(x) = \mathrm{e}^{-\|x\|^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ aber wegen $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^n$ liegt f nicht in $\mathscr{D}$.
(d) Im Gegensatz zu $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ein metrischer Raum. Die Metrik ist gegeben durch

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k+l)}} \frac{p_{kl}(\varphi-\psi)}{1+p_{kl}(\varphi-\psi)}, \quad \varphi,\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Definition I.18 Es sei $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist die *Fouriertransformierte* $\mathscr{F}f$ von f gegeben durch

$$\mathscr{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ und $x\cdot\xi = \sum_{k=1}^n x_k\xi_k$.

Wir bezeichnen den Normalisierungsfaktor mit $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}$. Achtung, diese Notation der Fouriertransformierten ist in der Literatur nicht einheitlich. So ist etwa bei Wladimirow, [8] die Konvention mit $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\xi\cdot x}$ unter dem Integral und der Normalisierungsfaktor vor dem Integral ist 1. Man beachte, dass $\mathscr{F}f(0) = \hat{f}(0) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Beispiel I.12 Wir berechnen die Fouriertransformierte $\widehat{\varphi} = \mathscr{F}\varphi$ von $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\|x\|^2/2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x\cdot x}$, $x \in \mathbb{R}^n$.
(a) $n=1$. Aus der reellen Analysis (Kapitel: Mehrdimensionale Integration, I.2.2 (c)) ist bekannt, dass $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$. Mit Hilfe der Funktionentheorie kann man zeigen, dass auch für alle $a\in\mathbb{R}$ gilt $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x+a\mathrm{i})^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$. Folglich gilt wegen $\frac{1}{2}(x+\mathrm{i}\xi)^2 + \frac{\xi^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \mathrm{i}x\xi$

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x+\mathrm{i}\xi)^2-\frac{1}{2}\xi^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2} = \varphi(\xi).$$

Somit ist φ bei der Fouriertransformation invariant, $\mathscr{F}(\varphi)=\varphi$. Wir werden später noch andere Eigenfunktionen der Fouriertransformation angeben.
(b) *Allgemeines* $n \geq 1$. Nach obigem erhalten wir

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(\xi) &= \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n x_k^2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{k=1}^n x_k\xi_k}\, \mathrm{d}x = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x_k^2 - \mathrm{i}x_k\xi_k}\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \prod_{k=1}^n \alpha_n \int \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x_k^2-\mathrm{i}x_k\xi_k}\, \mathrm{d}x_k\end{aligned}$$

$$\mathscr{F}\varphi(\xi) = \prod_{k=1}^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi_k^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}.$$

Also geht auch im allgemeinen Fall die Funktion in sich selbst über. Mittels Skalierung $x \mapsto cx$ erhält man

$$\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{-\frac{c^2x^2}{2}}\right)(\xi) = \frac{1}{c^n}\mathrm{e}^{-\dfrac{\xi^2}{2c^2}}.$$

Theorem I.13 *Es seien $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

(i) *$\mathscr{F}(x^\alpha \varphi(x)) = \mathrm{i}^{|\alpha|} D^\alpha(\mathscr{F}\varphi)$, also $\mathscr{F}\circ Q_k = -P_k\circ\mathscr{F}$, $k=1,\ldots,n$.*

(ii) *$\mathscr{F}(D^\alpha\varphi(x))(\xi) = \mathrm{i}^{|\alpha|}\xi^\alpha(\mathscr{F}\varphi)(\xi)$, also $\mathscr{F}\circ P_k = Q_k\circ\mathscr{F}$, $k=1,\ldots,n$.*

(iii) *$\mathscr{F}(\varphi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und außerdem folgt aus $\varphi_n \underset{\mathscr{S}}{\longrightarrow} \varphi$, dass $\mathscr{F}\varphi_n \underset{\mathscr{S}}{\longrightarrow} \mathscr{F}\varphi$, das heißt, die Fouriertransformation $\mathscr{F}$ ist ein stetiger linearer Operator auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

(iv) *$\mathscr{F}(\varphi * \psi) = \alpha_n^{-1}\mathscr{F}(\varphi)\mathscr{F}(\psi)$.*

(v) *$\mathscr{F}(\varphi\cdot\psi) = \alpha_n\mathscr{F}(\varphi)*\mathscr{F}(\psi)$*

(vi)

$$\mathscr{F}(\varphi(Ax+b))(\xi) = \frac{1}{|\det A|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A^{-1}b\cdot\xi}\mathscr{F}\varphi\left(A^{-\top}\xi\right),$$

wobei A eine reguläre $n\times n$-Matrix ist und $A^{-\top}$ bezeichnet die zu A^{-1} transponierte Matrix. Insbesondere gilt

$$\mathscr{F}(\varphi(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^n}(\mathscr{F}\varphi)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right),$$
$$\mathscr{F}(\varphi(x+b))(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\cdot\xi}(\mathscr{F}\varphi)(\xi).$$

Beweis. (i) Wir beweisen die Aussage für $\alpha=(1,0,\ldots,0)$. Der allgemeine Fall folgt daraus.

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}(\mathscr{F}\varphi)(\xi) = \alpha_n\frac{\partial}{\partial\xi_1}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da $\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\right)\varphi(x) = -\mathrm{i}x_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\varphi(x)$ gegen 0 konvergiert für $x\to\infty$, können wir Integration und partielle Differentiation vertauschen,

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}(\mathscr{F}\varphi)(\xi) = -\alpha_n\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\,\mathrm{i}x_1\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{F}(-\mathrm{i}x_1\varphi(x))(\xi).$$

(ii) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei zunächst $\alpha = (1,0,\dots,0)$. Partielle Integration liefert

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x)\right)(\xi) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\varphi_{x_1}(x)\,\mathrm{d}x = -\alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{i}\xi_1\alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi_1(\mathscr{F}\varphi)(\xi).$$

(iii) Nach (i) und (ii) erhalten wir für $|\alpha| \le k$ und $\left|\beta\right| \le l$

$$\left|\xi^\alpha D^\beta \mathscr{F}\varphi\right| \le \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \left|D^\alpha(x^\beta\varphi(x))\right| \mathrm{d}x \le c_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^l) \sum_{|\gamma|\le k} \left|D^\gamma\varphi(x)\right| \mathrm{d}x$$
$$\le c_2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+\|x\|^{l+n+1})}{(1+\|x\|^{n+1})} \sum_{|\gamma|\le k} \left|D^\gamma\varphi(x)\right| \mathrm{d}x$$
$$\le c_3 \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left((1+\|x\|^{l+n+1}) \sum_{|\gamma|\le k} \left|D^\gamma\varphi(x)\right|\right)$$
$$\le c_4\, p_{k,l+n+1}(\varphi).$$

Dies liefert $\mathscr{F}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und außerdem, dass $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist.
(iv) Zunächst bemerken wir, dass $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Faltung eine kommutative Algebra ist, wobei $\left\|f * g\right\|_{\mathrm{L}^1} \le \left\|f\right\|_{\mathrm{L}^1}\left\|g\right\|_{\mathrm{L}^1}$. Nach Definition und wegen Fubini ist

$$\mathscr{F}(\varphi*\psi)(\xi) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \alpha_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\psi(x-y)\,\mathrm{d}x\right) \alpha_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$
$$\underset{z=x-y}{=} \alpha_n^{-1}\mathscr{F}\psi(\xi)\mathscr{F}\varphi(\xi).$$

(v) wird später gezeigt, nach Satz I.14.
(vi) folgt unmittelbar unter Verwendung von $A^{-1}(y)(\xi) = y\left(A^{-\top}(\xi)\right)$. ■

Bemerkung I.11 Ähnliche Eigenschaften wie $\mathscr{F}$ hat der Operator $\mathscr{G}$, der genau wie $\mathscr{F}$ auf $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ definiert ist:

$$\mathscr{G}\varphi(\xi) = \check{\varphi}(\xi) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Setzt man $\varphi_-(x) := \varphi(-x)$, so gilt

$$\mathscr{G}\varphi = \mathscr{F}\varphi_- = \overline{\mathscr{F}(\overline{\varphi})} \quad \text{und} \quad \mathscr{F}\varphi = \mathscr{G}\varphi_- = \overline{\mathscr{G}(\overline{\varphi})}.$$

Man erkennt leicht, dass (iv) auch für den Operator $\mathscr{G}$ gilt:

$$\mathscr{G}(\varphi*\psi) = \alpha_n^{-1}\mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi).$$

Satz I.14 (Inverse Fouriertransformation) *Die Fouriertransformation ist eine bijektive lineare Abbildung $\mathscr{F}: \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Die inverse Fouriertransformation ist gegeben durch $\mathscr{G}$:*

$$\mathscr{F}(\mathscr{G}\varphi) = \mathscr{G}(\mathscr{F}\varphi) = \varphi, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Es sei $\psi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x \cdot x}{2}}$ and $\Psi(x) = \psi(\varepsilon x) = \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2 x^2}{2}}$. Dann gilt $\Psi_\varepsilon(x) := \mathscr{F}\Psi(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Es ist

$$\alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,\mathrm{d}x = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \hat{\psi}(0) = 1.$$

Außerdem hat man

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(\varepsilon x)\,\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(0)\,\mathrm{d}x = \varphi(0). \quad \text{(I.12)}$$

Mit anderen Worten, $\alpha_n\Psi_\varepsilon(x)$ ist eine δ-Folge.
Wir berechnen $\mathscr{G}(\mathscr{F}\varphi\Psi)(x)$. Mit Fubinis Theorem folgt

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}(\mathscr{F}\varphi\Psi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}\varphi)(\xi)\Psi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot y}\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y-x)\cdot\xi}\Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)(\mathscr{F}\Psi)(y-x)\,\mathrm{d}y \\
&\underset{z:=y-x}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}\Psi(z)\varphi(z+x)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\varepsilon(z)\varphi(z+x)\,\mathrm{d}z \\
&\underset{\text{für } \varepsilon\to 0, \text{ vgl. (I.12)}}{\longrightarrow} \varphi(x).
\end{aligned}$$

Nach Lebesgues Theorem über die majorisierte Konvergenz ist,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathscr{G}(\mathscr{F}\varphi\cdot\Psi)(x) = \alpha_n\int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}\varphi)(\xi)\psi(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi = \alpha_n\int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}\varphi)(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi = \mathscr{G}(\mathscr{F}\varphi)(x).$$

Hieraus folgt die erste Identität. Die zweite Identität $\mathscr{F}(\mathscr{G}\varphi) = \varphi$ folgt aus $\mathscr{G}(\varphi) = \overline{\mathscr{F}(\overline{\varphi})}$, $\mathscr{F}(\varphi) = \overline{\mathscr{G}(\overline{\varphi})}$ und der ersten Identität. ■

Wir beenden nun den Beweis von Theorem I.13 (v). Dazu sei $\varphi = \mathscr{G}\varphi_1$ und $\psi = \mathscr{G}\psi_1$ mit $\varphi_1, \psi_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Nach (iv) ist dann

$$\mathscr{F}(\varphi\cdot\psi) = \mathscr{F}(\mathscr{G}(\varphi_1)\mathscr{G}(\psi_1)) = \mathscr{F}(\alpha_n\mathscr{G}(\varphi_1 * \psi_1)) = \alpha_n\varphi_1 * \psi_1 = \alpha_n\mathscr{F}\varphi * \mathscr{F}\psi.$$

Satz I.15 (Fourier-Plancherel-Formel) *Es seien $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\overline{\psi}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}(\varphi)\overline{\mathscr{F}(\psi)}\,\mathrm{d}x,$$

Insbesondere gilt $\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathscr{F}(\varphi)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}$.

Beweis. Zunächst erkennt man, dass

$$\mathscr{F}(\overline{\psi})(-y) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y}\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}x = \alpha_n \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\psi(x)\,\mathrm{d}x} = \overline{\mathscr{F}(\psi)(y)}. \tag{I.13}$$

Nach Theorem I.13 (v) ist außerdem

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}x &= \alpha_n^{-1}\mathscr{F}(\varphi\cdot\overline{\psi})(0) = (\mathscr{F}(\varphi)*\mathscr{F}(\overline{\psi}))(0)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}(\varphi)(y)\mathscr{F}(\overline{\psi})(0-y)\,\mathrm{d}y \underset{(\mathrm{I}.13)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}(\varphi)(y)\overline{\mathscr{F}(\psi)(y)}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

■

Bemerkung I.12 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ ist ein dichter Teilraum, siehe ÜA 11.2. Daher lässt sich die Fouriertransformation eindeutig zu einem unitären Operator $\mathscr{F}: \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. (Und zwar wähle man zu einer gegeben Funktion $f \in \mathrm{L}^2$ eine Folge $\varphi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, die gegen f in der L^2-Norm konvergiert. Da $\mathscr{F}$ diese Norm erhält, gilt $\left\|\mathscr{F}\varphi_k - \mathscr{F}\varphi_m\right\| = \left\|\varphi_k - \varphi_m\right\|$ und da (φ_n) eine Cauchy-Folge im L^2 ist, ist auch $(\mathscr{F}\varphi_k)$ eine Cauchy-Folge. Somit konvergiert letztere gegen ein $g \in \mathrm{L}^2$. Wir definieren dann $\mathscr{F}(f) = g$.)

I.4.2 Der Raum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

Definition I.19 Eine *temperierte Distribution* (oder auch *langsam wachsende Distribution*) ist ein stetiges lineares Funktional T auf dem Testfunktionenraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dabei heißt T *stetig* auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, wenn für alle Folgen $\varphi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \underset{\mathscr{S}}{\longrightarrow} 0$ gilt $T\left(\varphi_k\right) \to 0$. Die Menge der temperierten Distributionen bezeichnen wir mit $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Für eine Folge $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} 0$ folgt, dass $\varphi_k \underset{\mathscr{S}}{\longrightarrow} 0$. Schränkt man also ein stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ein auf den Raum $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, so bleibt das Funktional stetig auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Somit kann jede $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$-Distribution auch als $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$- Distribution aufgefasst werden. Die Einschränkungsabbildung $e: \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $e(T) = T\restriction_{\mathscr{D}}$ ist injektiv, denn wenn $T(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}$, so ist sogar $T(\psi) = 0$ für alle $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, da $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht und T stetig auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist. Über diese Injektion e können wir $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit einem Teilraum von $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ identifizieren; wir schreiben etwas lax, $\mathrm{S}' \subseteq \mathscr{D}'$.

Lemma I.16 (Charakterisierung der Stetigkeit von T in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$) *Ein lineares Funktional T auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig, genau dann, wenn es nicht-negative ganze Zahlen k und l und eine positive Konstante C derart gibt, dass für alle $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*

$$\left|T(\varphi)\right| \le C\,p_{kl}(\varphi),$$

wobei $p_{kl}(\varphi) = \displaystyle\sum_{|\alpha|\le k\,\left|\beta\right|\le l,} p_{\alpha\beta}(\varphi) = \sum_{|\alpha|\le k\,\left|\beta\right|\le l,} \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\beta D^\alpha\varphi(x)\right|.$

Bemerkung I.13 (reguläre Distributionen) (a) Es sei $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ oder $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
(b) Es gibt lokal integrierbare Funktionen, die *keine* reguläre temperierte Distribution T_f definieren. So ist zum Beispiel $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ stetig auf $\mathbb{R}$ (und damit in $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$), aber $T_f(\varphi)$ ist nicht wohldefiniert auf $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, denn $T_{\mathrm{e}^{x^2}}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = +\infty$.
(c) Wenn $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{supp} T$ ist kompakt, dann gilt auch $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sei nämlich $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\eta = 1$ auf einer Umgebung des Trägers von T. Dann kann man definieren $S(\varphi) := T(\varphi\eta)$. Dann ist S eine temperierte Distribution, die T stetig fortsetzt.
(d) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar. Wenn ein $C > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$ derart existieren, dass

$$\left| f(x) \right| \leq C(1 + \|x\|^2)^m \quad \text{f. ü. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Die obige Abschätzung und Bemerkung I.10 liefern

$$\begin{aligned}\left| T_f\left(\varphi\right) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^2)^m (1+\|x\|^2)^n \frac{1}{(1+\|x\|^2)^n} \left|\varphi(x)\right| \mathrm{d}x \\ &\leq C p_{0,2m+2n}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{(1+\|x\|^2)^n}.\end{aligned}$$

Nach Lemma I.16, ist T_f eine temperierte, reguläre Distribution, $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

Operationen in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

Addition, Multiplikation, Differentiation, Tensorprodukt werden in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ genauso definiert wie in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Man muss aber jedes Mal noch zeigen, dass dadurch ein *stetiges* Funktional auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert ist. Wenn $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, dann gilt:
(a) $D^\alpha T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ für alle Multiindizes α.
(b) Es gilt $a \cdot T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, falls $a \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit allen partiellen Ableitungen polynomial beschränkt ist, das heißt, für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gibt es ein $C_\alpha > 0$ und ein $k_\alpha \geq 0$ mit $\left| D^\alpha f(x) \right| \leq C_\alpha (1 + \|x\|)^{k_\alpha}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
(c) Die lineare Transformation $T(Ax + b) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist ebenfalls temperiert für jede reguläre $n \times n$-Matrix und alle $b \in \mathbb{R}^n$.
(d) $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ impliziert, dass $T \otimes S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.
(e) Für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Faltung

$$\begin{aligned}\psi * T\left(\varphi\right) &= (1(x) \otimes T(y))\left(\psi(x)\varphi(x+y)\right), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \\ &= T\left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x+y)\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

I.4.3 Die Fouriertransformation im Raum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

Wir folgen unserem *Allgemeinen Prinzip* und definieren die Fouriertransformierte einer regulären Distribution $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ vermöge $\mathscr{F}(T_f) = T_{\mathscr{F}f}$. Sei $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ integrierbar. Dann existieren sowohl seine Fouriertransformation $\hat{f}$ als auch die reguläre Distribution $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Nach Fubinis Theorem gilt

$$T_{\hat{f}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \alpha_n \iint_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x = T_f(\widehat{\varphi}).$$

Somit ist $T_{\mathscr{F}f}(\varphi) = T_f(\mathscr{F}\varphi)$. Diese Gleichung nehmen wir als Definition.

Definition I.20 Für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir

$$\mathscr{F}T(\varphi) = T(\mathscr{F}\varphi). \tag{I.14}$$

$\widehat{T} = \mathscr{F}T$ heißt *Fouriertransformierte* der Distribution T.

Wegen $\mathscr{F}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathscr{F}T$ wohldefiniert auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Da $\mathscr{F}$ ein stetiger linearer Operator ist und T ein stetiges lineares Funktional, ist $\mathscr{F}T$ ebenfalls ein stetiges lineares Funktional.

Lemma I.17 *Die Fouriertransformation $\mathscr{F}: \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist ein stetiger, bijektiver, linearer Operator.*
Sein Umkehroperator $\mathscr{G}: \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch $\mathscr{G}T(\varphi) = T(\mathscr{G}\varphi)$.

Bemerkung I.14 Die Eigenschaften (i) und (ii) aus Theorem I.13 gelten auch für $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Also lautet (i) nun $\mathscr{F}(x^\alpha T) = \mathrm{i}^{|\alpha|}D^\alpha(\mathscr{F}T)$. Tatsächlich gilt für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ nach Theorem I.13 (ii)

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(x^\alpha T)(\varphi) &= x^\alpha T(\mathscr{F}\varphi) = T(x^\alpha \mathscr{F}\varphi) = T\left((-\mathrm{i})^{|\alpha|}\mathscr{F}(D^\alpha\varphi)\right)\\ &= (-1)^{|\alpha|}(-\mathrm{i})^{|\alpha|}D^\alpha(\mathscr{F}T)(\varphi) = \mathrm{i}^{|\alpha|}D^\alpha T(\varphi).\end{aligned}$$

Beispiel I.13 (a) Es sei $a \in \mathbb{R}^n$. Wir berechnen $\mathscr{F}\delta_a$. Für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\mathscr{F}\delta_a(\varphi) = \delta_a(\mathscr{F}\varphi) = (\mathscr{F}\varphi)(a) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot a}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = T_{\alpha_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot a}}(\varphi).$$

Folglich ist die Distribution $\mathscr{F}\delta_a$ die reguläre Distribution zur Funktion $f(x) = \alpha_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot a}$. Insbesondere ist $\mathscr{F}(\delta) = T_{\alpha_n 1}$ die konstante Funktion. Man beachte, dass

$$\mathscr{F}(\delta)(\varphi) = \delta(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \delta(\widehat{\varphi_-}) = \delta(\mathscr{G}\varphi) = \mathscr{G}(\delta)(\varphi).$$

Daher folgt aus $\mathscr{F}(\delta) = \alpha_n 1$ durch Invertieren $\alpha_n^{-1}\delta = \mathscr{G}(T_1) = \mathscr{F}(T_1)$.
Übung. $\mathscr{G}(\delta_a) = \mathscr{F}(\delta_{-a})$.
(b) $n = 1$, $b > 0$.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(H(b - |x|)) &= \alpha_1 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} H(b - |x|)\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha_1 \int_{-b}^{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(b\xi)}{\xi}.\end{aligned}$$

(c) *Die einfache und die doppelte Schicht.* Es sei S eine kompakte, reguläre, stückweise differenzierbare sich nicht überschneidende Fläche im $\mathbb{R}^3$ und $\varrho(x) \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ eine Funktion auf

S. (eine Dichtefunktion oder Ladungs- oder Masseverteilung). Wir definieren eine Distribution $\varrho\delta_S$ als skalares Oberflächenintegral

$$\varrho\delta_S(\varphi) = \iint\limits_S \varrho(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}S.$$

Da der Träger von $\varrho\delta_S$ die Fläche S ist, eine Fläche vom Volumenmaß 0, definiert $\varrho\delta_S$ eine singuläre Distribution. Wir nennen sie die Distribution der *einfachen Schicht*.
Analog definiert man die Distribution der *doppelten Schicht*, welche bei Dipolen eine Rolle spielt:

$$-\frac{\partial}{\partial\vec{n}}(\varrho\delta_S)(\varphi) = \iint\limits_S \varrho(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S,$$

wobei $\vec{n}$ die Normalenableitung (Ableitung in Richtung des Normalenvektors auf der Fläche) bezeichnet.
Wir berechnen die Fouriertransformation der Distribution der einfachen Schicht $\mathscr{F}(\varrho\delta_S)$ für den Fall einer Sphäre $\mathrm{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r\}$ vom Radius r und der Dichte $\varrho = 1$. Nach Fubinis Theorem ist

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\delta_{\mathrm{S}_r}(\varphi) &= \delta_{\mathrm{S}_r(0)}(\mathscr{F}\varphi)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\iint_{\mathrm{S}_r}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}S_\xi\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\iint_{\mathrm{S}_r}(\cos(x\cdot\xi) - \mathrm{i}\underbrace{\sin(x\cdot\xi))\,\mathrm{d}S_\xi}_{\text{ist } 0}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Unter Verwendung von sphärischen Koordinaten auf S_r, wobei x auf der z-Achse fixiert ist und ϑ der Winkel zwischen x und $\xi \in \mathrm{S}_r$ ist, erhalten wir das Oberflächenelement $\mathrm{d}S = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta$ und $x\cdot\xi = r\,\|x\|\cos\vartheta$. Somit kann man das (innere) Oberflächenintegral berechnen zu

$$\begin{aligned}&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(\|x\|\,r\cos\vartheta)r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi, \quad s = \|x\|\,r\cos\vartheta, \quad \mathrm{d}s = -\|x\|\,r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\\ &= 2\pi\int_{\|x\|r}^{-\|x\|r} -\cos s\,\frac{r}{\|x\|}\,\mathrm{d}s = 4\pi\frac{r}{\|x\|}\sin(\|x\|\,r).\end{aligned}$$

Also ist

$$\mathscr{F}\delta_{\mathrm{S}_r}(\varphi) = \frac{2r}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(x)\frac{\sin(r\,\|x\|)}{\|x\|}\,\mathrm{d}x;$$

die Fouriertransformierte von δ_{S_r}, eine reguläre Distribution zur Funktion

$$\mathscr{F}\delta_{\mathrm{S}_r}(x) = \frac{2r}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sin(r\,\|x\|)}{\|x\|}.$$

(d) *Die Resolvente des Laplace-Operators* $-\Delta$. Wir betrachten den Hilbertraum $H = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ und in ihm den dichten Teilraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Laplace-Operator $A\varphi = -\Delta\varphi$ definiert. Zur Erinnerung: Die Resolvente $R_\lambda(A)$ eines linearen Operators A an der Stelle

λ ist der beschränkte, auf ganz H definierte Operator, der die Gleichung $R_\lambda(A)(A-\lambda I) = (A-\lambda I)R_\lambda(A) = I$ erfüllt. Er ist also der inverse Operator zu $A-\lambda I$. Für $f \in H$ suchen wir also ein $u \in H$ mit $R_\lambda(A) f = u$. Dies ist äquivalent zum Auflösen der Gleichung $f = (A-\lambda I)(u)$ nach u. Im Falle von $A = -\Delta$ können wir dazu die Fouriertransformation benutzen. Nach Theorem I.13 (ii) ist nämlich

$$-\Delta u - \lambda u = f, \quad -\mathscr{F}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u\right) - \lambda \mathscr{F} u = \mathscr{F} f,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 (\mathscr{F} u)(\xi) - \lambda \mathscr{F} u(\xi) = (\mathscr{F} u)(\xi)(\xi^2 - \lambda) = \mathscr{F} f(\xi)$$

$$\mathscr{F} u(\xi) = \frac{\mathscr{F} f(\xi)}{\xi^2 - \lambda}$$

$$u(x) = \mathscr{G}\left(\frac{1}{\xi^2 - \lambda} \mathscr{F} f(\xi)\right)(x)$$

Folglich gilt:

$$R_\lambda(-\Delta) = \mathscr{F}^{-1} \circ \frac{1}{\xi^2 - \lambda} \circ \mathscr{F},$$

wobei in der Mitte ein Multiplikationsoperator, in diesem Falle mit der Funktion $1/(\xi^2 - \lambda)$, steht. Man erkennt, dass dieser Operator in H beschränkt ist, da genau dann, wenn der Multiplikationsoperator beschränkt ist, also wenn der Nenner ungleich Null ist für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, so dass für das Spektrum von $-\Delta$ gilt $\sigma(-\Delta) \subset \mathbb{R}_+$.

I.5 Anhang — Mehr zur Faltung

Da die folgende Eigenschaft später noch des öfteren gebraucht wird, wollen wir sie hier erwähnen:

Satz I.18 *Es seien $T(x,t)$ und $S(x,t)$ Distributionen in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit* $\operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ *und* $\operatorname{supp} S \subset \Gamma_+(0,0)$*, dabei ist $\Gamma_+(0,0) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq at\}$ der Vorwärtslichtkegel am Ursprung. Dann existiert die Faltung $T * S$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ und kann wie folgt geschrieben werden*

$$T * S(\varphi) = T(x,t) \otimes S(y,s)\left(\eta(t)\eta(s)\eta(as - \|y\|)\varphi(x+y, t+s)\right), \tag{I.15}$$

$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, wobei $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ eine Testfunktion ist mit $\eta(t) = 1$ für $t > -\varepsilon$ und $\varepsilon > 0$ ist eine fixierte positive Zahl. Die Faltung $(T * S)(x,t)$ verschwindet für $t < 0$ und ist in beiden Komponenten stetig, das heißt,
(a) *Wenn $T_k \to T$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ und* $\operatorname{supp} S_k, S \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*, dann gilt $T_k * S \to T * S$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.*
(b) *Wenn $S_k \to S$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ und* $\operatorname{supp} S_k, S \subseteq \Gamma_+(0,0)$*, dann $T * S_k \to T * S$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.*

Beweis. Wegen $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\eta(x) = 0$ für $x < -\delta$. Es sei $\varphi(x,t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ so gegeben, dass $\operatorname{supp} \varphi \in U_R(0)$ für ein geeignetes $R > 0$. Es sei $\eta_k(x,t,y,s)$, $k \to \infty$, eine Folge von Testfunktionen aus $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$, die im $\mathbb{R}^{2n+2}$ gegen 1 konvergiert. Für genügend große k ist dann

$$\begin{aligned}\psi_k &:= \eta(s)\eta(t)\eta(as-\|y\|)\eta_k(x,t,y,s)\varphi(x+y,t+s)\\ &= \eta(s)\eta(t)\eta(at-\|y\|)\varphi(x+y,t+s) =: \psi.\end{aligned} \tag{I.16}$$

Wir müssen zeigen, dass $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$. Natürlich ist ψ beliebig oft differenzierbar. Der Träger $\operatorname{supp}\psi$ ist enthalten in

$$\{(x,t,y,s) \mid s,t \geq -\delta, as-\|y\| \geq -\delta, \quad \|x+y\|^2 + |r+s|^2 \leq R^2\},$$

und diese Menge ist beschränkt.
Wegen $\eta(t) = 1$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} T$ und $\eta(s)\eta(as-\|y\|) = 1$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} S$ gilt, $T(x,t) = \eta(x)T(x,t)$ und $S(y,s) = \eta(s)\eta(as-\|y\|)S(y,s)$. Mittels (I.16) erhalten wir

$$\begin{aligned}T*S(\varphi) &= \lim_{k\to\infty} T(x,t)\otimes S(y,s)\big(\eta_k(x,t,y,s)\varphi(x+y,t+s)\big)\\ &= \lim_{k\to\infty} T(x,t)\otimes S(y,s)\big(\psi_k\big), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n+2}).\end{aligned}$$

Hieraus folgt die erste Behauptung.
Wir zeigen nun, dass die rechte Seite von (I.15) ein stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ definiert. Sei $\varphi_k \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} \varphi$ für $k \to \infty$. Dann ist

$$\psi_k := \eta(t)\eta(s)\eta(as-\|y\|)\,\varphi_k(x+y,t+s) \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} \psi$$

für $k \to \infty$. Somit gilt,

$$T*S(\varphi_k) = T(x,t)\otimes S(y,s)\big(\psi_k\big) \to T(x,t)\otimes S(y,s)\big(\psi\big) = T*S(\varphi), \quad k\to\infty,$$

und $T*S$ ist stetig.
Wir zeigen, dass $T*S$ für $t<0$ verschwindet. Dazu sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \mathbb{R}^n \times (-\infty, -\delta_1]$. Wähle $\delta > \delta_1/2$, dann hat man

$$\eta(t)\eta(s)\eta(as-\|y\|)\varphi(x+y,t+s) = 0,$$

sodass $T*S(\varphi) = 0$. Die Stetigkeit der Faltung folgt aus der Stetigkeit des Tensorproduktes. ■

Literaturverzeichnis

[1] V. I. Arnold, *Lectures in Partial Differential Equations*, Universitext, Springer and Phasis, Berlin. Moscow, 2004.

[2] O. Forster, *Analysis 3 (in German)*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik, Vieweg, Braunschweig, 1981.

[3] I. M. Gelfand and G. E. Schilow, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen). III: Einige Fragen zur Theorie der Differentialgleichungen. (German)*, Hochschulbücher für Mathematik, no. 49, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.

[4] ______, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen). I: Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen. (German)*, Hochschulbücher für Mathematik, no. 47, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.

[5] H. Triebel, *Higher analysis*, Hochschulbücher für Mathematik, Johann Ambrosius Barth Verlag GmbH, Leipzig, 1992.

[6] W. Walter, *Einführung in die Theorie der Distributionen (in German)*, Bibliographisches Institut, B.I.- Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1974.

[7] ______, *Analysis 1–2 (in German)*, fifth ed., Springer-Lehrbuch, Springer, Berlin, 2002.

[8] V. S. Wladimirow, *Gleichungen der mathematischen Physik (in German)*, Hochschulbücher für Mathematik, no. 74, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.