Lösungen

Lineare Algebra für Physiker, Serie 9

Abgabe am 13.12.2007

1. (a) Gegeben sei die Permutation $\tau \in \mathbf{S}_n$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$ mit fixierten $1 \le i < j \le n$. Berechnen Sie $\operatorname{inv}\tau$ und $\operatorname{sign}\tau$.

   (b) Wie groß ist die maximale Anzahl von Inversionen, die eine Permutation $\sigma \in \mathbf{S}_n$ haben kann. Bestimmen Sie alle $\sigma \in \mathbf{S}_n$, die diese maximale Inversionszahl besitzen. Für welche $n \in \mathbb{N}$ sind diese Permutationen gerade?

   (c) Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Welche Summanden tauchen in der Leibnizdefinition der Determinante $\det A$ auf und welches Vorzeichen haben sie

   $a_{23}a_{34}a_{15}a_{51}a_{42}$, $a_{51}a_{43}a_{22}a_{31}a_{14}$, $a_{13}a_{21}a_{45}a_{52}$, $a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}a_{22}$, $a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}a_{12}$?

4 P

Lösung. (a) Um $\operatorname{inv}\tau$ zu berechnen, zählt man die Inversionen ab:

$$\begin{array}{lll} j = \tau(i) & \text{steht in Inversion zu} & \underbrace{i+1}_{=\tau(i+1)}, \ldots, \underbrace{j-1}_{=\tau(j-1)}, \\ i = \tau(j) & \text{steht in Inversion zu} & i+1, \ldots, j-1 \end{array}$$

Außerdem steht j und i in Inversion, somit $\operatorname{inv}\tau = 2(j-1-i)+1$ und $\operatorname{sign}\tau = (-1)^{2(j-1-i)+1} = -1$.

(b) Um die maximale Anzahl von Inversionen zu bestimmen, betrachtet man zunächst alle möglichen Paare (i,j), $i,j \in X$, $i < j$. Das sind $\operatorname{inv}_{max} = \frac{n(n-1)}{2}$, und diese Zahl inv_{max} ist auch eine obere Schranke für die Anzahl von Inversionen. Für die Permutation $\sigma_{max} : \sigma_{max}(i) = n - i + 1$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt $\operatorname{inv}(\sigma_{max}) = \operatorname{inv}_{max}$, denn jedes i steht zu allen seinen Nachfolgern in Inversion. Folglich

$$\operatorname{inv}(\sigma_{max}) = \sum_{i=1}^{n}(n-i) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sign}(\sigma_{max}) = \begin{cases} +1 & \text{für } n = 4l, n = 4l-3 \\ -1 & \text{für } n = 4l-2, n = 4l-1 \end{cases}$$

mit $l \in \mathbb{N}$. Dabei ist σ_{max} die einzige Permutation $\sigma \in \mathbf{S}_n$ mit maximaler Inversionszahl inv_{max}, da jede Veränderung der Abbildungsvorschrift in σ_{max} eine Verringerung der Inversionszahl nach sich zieht.

(c) Zum ersten Summanden gehört die Permutation – wir benutzen die Zyklenschreibweise

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 5)(2\ 3\ 4)$$

π ist also das Produkt aus einem ungeraden Zyklus $(1\ 5)$ und einem geraden Zyklus $(2\ 3\ 4)$, somit ungerade. Der Summand hat negatives Vorzeichen. Der zweite Summand

hat nur *vier* Faktoren, kann also nicht in einer 5×5 Determinante auftreten.
Beim dritten Summanden kommt der Zeilenindex 2 sowohl im Faktor a_{23} als auch im Faktor a_{22} – das kann nicht sein.
Imvierten Summanden ist $\pi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ also eine gerade Permutation; Vorzeichen $+$.

2. (a) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ und $D_n(a)$ die n-reihige Determinante

$$D_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}.$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $D_n(a) = \frac{1}{2}((a+1)^n + (a-1)^n)$.

(b) Zeigen Sie, dass aus (a) für alle $a, b \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ -b & a & b & \cdots & b & b \\ \vdots & & & \vdots & a & b \\ -b & -b & -b & \cdots & -b & a \end{vmatrix} = \frac{1}{2}((a+b)^n + (a-b)^n).$$

Hinweis. (a) Benutzen Sie die Linearität der Determinanten in der ersten Zeile, angewandt auf die Identität $(a, 1, \ldots, 1) = (a-1, 0, \ldots, 0) + (1, \ldots, 1)$. Wenden Sie auf die zweite dabei entstehende Determinante den Gauß-Algorithmus an. Sie erhalten eine Rekursionsformel, die $D_n(a)$ aus $D_{n-1}(a)$ berechnet. (b) Ziehen Sie den Faktor b aus jeder Zeile heraus. **4 + 2 P**

Lösung. Wegen des ersten Hinweises gilt

$$D_n(a) = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man die erste Determinante nach der ersten Zeile und addiert man in der zweiten Determinante die erste Zeile zu allen anderen Zeilen, so hat man:

$$D_n(a) = (a-1)D_{n-1}(a) + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & & & \vdots & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a+1 \end{vmatrix}$$

Die zweite ist eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Diagonalelemente ist:

$$D_n(a) = (a-1)D_{n-1}(a) + (a+1)^{n-1}.$$

Durch vollständige Induktion zeigt man nun die angegebene Formel:
I.A. $n = 1$ Offenbar ist $D_1(a) = a$ – andererseits ist auch $\frac{1}{2}(a+1+a-1) = a$.

I.Schritt: Wir setzen voraus, dass die Formel für $n-1$ gilt und zeigen sie für n.

Ind. Beweis: Nach Rekursion und I.Vor. ist

$$\begin{aligned} D_n(a) &= (a-1)\left(\frac{1}{2}((a+1)^{n-1}+(a-1)^{n-1})\right)+(a+1)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(a-1)^n+\frac{1}{2}(a+1)^{n-1}(a-1+2)=\frac{1}{2}(a-1)^n+\frac{1}{2}(a+1)^n. \end{aligned}$$

(b) folgt aus (a) durch zeilenweises Ausklammern des Faktors b ($b \neq 0$ — im Falle $b=0$ gilt die Formel offenbar auch). Dann wendet man (a) an für $D_n\left(\frac{a}{b}\right)$.

3. Beweisen Sie, dass

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

durch 19 teilbar ist, ohne die Determinante auszurechnen. Verwenden Sie hingegen, dass die als Dezimalzahlen aufgefassten Zeilen 21375, 38798 , 34162, 40223 und 79154 alle durch 19 teilbar sind. **3 P**

Lösung. Zunächst ist zu bemerken, dass jede durch 19 teilbare ganze Zahl eine Darstellung der Form $19k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat. Addiert man das 10000-fache der 1. Spalte, das 1000-fache der 2. Spalte, das 100-fache der 3. Spalte und das 10-fache der 4. Spalte jeweils zur 5. Spalte, so ändert sich gemäß (D6') der Wert der Determinante nicht, also

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 21375 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 38798 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 34162 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 40223 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 79154 \end{vmatrix} = 19 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & k_1 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & k_2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & k_3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & k_4 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & k_5 \end{vmatrix}$$

mit $k_j \in \mathbb{N}$, $j=1,\ldots,5$. Da z.B. aus der Leibnizdefinition zu erkennen ist, dass die Determinante einer Matrix mit ganzzahligen Einträgen wieder ganzzahlig ist, folgt die Behauptung.

4. Es sei $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine fixierte Matrix. Wir definieren die lineare Abbildung $S\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ über $S(A)=B\cdot A$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie die Determinante, die Spur, den Rang und den Defekt von S in Abhängigkeit von B. **4 P**

Lösung. Es sei $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wir wählen als Basis B_2 von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ die vier Matrixeinsen E_{11}, E_{12}, E_{21} und E_{22} und erhalten

$$S(E_{11})=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad S(E_{12})=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix},$$
$$S(E_{21})=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \quad S(E_{22})=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Somit liest man die Matrix von S bezüglich B_2 ab (spaltenweise):

$$S=M_{B_2,B_2}(S)=\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det S = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & d-bc/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-bc/a \end{vmatrix} = (\det B)^2$$

im Falle $a \neq 0$. Für $a = 0$ folgt dasselbe Ergebnis, wenn man 1. mit 3. Zeile und 2. mit 4. Zeile in S vertauscht . Weiterhin ist $\operatorname{tr} S = 2(a+d) = 2 \operatorname{tr} B$, $\operatorname{rg} S = 2 \operatorname{rg} B$ (Fallunterscheidung), $\operatorname{def} S = 4 - \operatorname{rg} S = 2 \operatorname{def} B$.