Lösungen

Lineare Algebra für Physiker, Serie 8

Abgabe am 6.12.2007

1. Berechnen Sie die Determinante der schiefsymmetrischen 3×3-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

3 P

Lösung. Dies war Beispiel 1 (c) aus der Vorlesung.

2. Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4 P

Lösung. Mit Gaußschem Algorithmus und (D7) ergibt sich

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{n}{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n+1}{n} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1$$

3. (a) Beweisen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(b-a)(c-a).$$

(b) Für $n+1$ Spaltenvektoren $b_1, \ldots, b_{n+1} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_{n+1} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \det(b_1 - b_{n+1}, b_2 - b_{n+1}, \cdots, b_n - b_{n+1}).$$

6 P

Lösung. (a) Mit Gaußschem Algorithmus, (D6), binomischer Formel, (D1) und (D7) ergibt sich

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & b-a & b^2-a^2\\ 0 & c-a & c^2-a^2\end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & b+a\\ 0 & 1 & c+a\end{vmatrix}\\ &= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & b+a\\ 0 & 0 & c-b\end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).\end{aligned}$$

(oder auch nach Entwicklungssatz, Definition, Sarrusscher Regel)

(b) Subtrahiert man nacheinander die letzte Spalte von jeder anderen , so ändert sich gemäß (D6') der Wert der Determinante nicht, also

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}b_1 & \cdots & b_{n+1}\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}b_1-b_{n+1} & b_2-b_{n+1} & \cdots & b_n-b_{n+1} & b_{n+1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= 1\cdot\det(b_1-b_{n+1}, b_2-b_{n+1}, \cdots, b_n-b_{n+1}),\end{aligned}$$

wobei die Eigenschaft (D8) verwendet wurde (oder auch nach Entwicklungssatz bez. letzter Zeile).