Lösungen

Lineare Algebra für Physiker, Serie 7

Abgabe am 4. 12. 2007

1. Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar? Geben Sie gegebenenfalls die inverse Matrix an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter. **6 P**

Lösung. Punkteverteilung: $\mathbf{1+2+1+2=6\,P}$
Man sieht, dass $A^2 = I_5$, also $A^{-1} = A$. Mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus bestimmt man die inversen Matrizen gemäß der Vorschrift in Abschnitt 2.3.3 zu

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{7}{2} & 1 & -\frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Die Matrix D ist genau für $\lambda \neq -2$ invertierbar (siehe auch Übungsaufgabe 6.1 $(-A)$). Es gilt

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \frac{1}{\lambda+2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2\lambda+1}{3} & -\frac{\lambda-1}{3} \\ 1 & -\frac{\lambda-1}{3} & -\frac{2\lambda+1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basen $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = (1,-1,2)$, $b_2 = (2,3,7)$ und $b_3 = (2,3,6)$ sowie $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, $c_1 = (1,1,2)$, $c_2 = (-1,3,3)$ und $c_3 = (-2,7,6)$ gegeben.

   Bestimmen Sie die Koordinaten (y_1, y_2, y_3) des Vektors $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3$ bezüglich der Basis C. **3 P**

   Lösung. Es ist (formal!) und zeilenweise zu lesen

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = A^\top \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad A = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \right)^\top = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -9 & -20 \\ -4 & 21 & 40 \\ 6 & -19 & -35 \end{pmatrix}.$$

Somit berechnet sich der Koordinatenvektor (y_1, y_2, y_3) bezüglich der Basis C durch

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 13 & 12 \\ 20 & 17 & 8 \\ -10 & -7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

3. Mit der Basis B aus Aufgabe 2 sei eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$T(b_1) = d_1 + 2d_2, \quad T(b_2) = -d_2 + d_1, \quad T(b_3) = 2d_1 + 3d_2,$$

wobei $d_1 = (1,2)$ und $d_2 = (-1,-1)$, $D = \{d_1, d_2\}$.

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $M_{B,D}(T)$.

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $M_{B_3,B_2}(T)$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$. **4 P**

Lösung. (a) $M_{B,D}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) Da $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$, ist die Transformationsmatrix A_3 von der Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ auf die Standardbasis $B_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ gegeben durch

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{-\top} \Rightarrow M_{B_3,D}(T) = M_{B,D}(T) A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -12 & -2 & 5 \\ 13 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 17 & 2 & -5 \\ 57 & 7 & -20 \end{pmatrix}$$

Da $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$, ist die Transformationsmatrix A_2 von der Basis $D = \{d_1, d_2\}$ auf die Standardbasis $B_2 = \{e_1, e_2\}$ gegeben durch

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-\top} \Rightarrow M_{B_3,B_2}(T) = A_2^{-1} M_{B_3,D}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 17 & 2 & -5 \\ 57 & 7 & -20 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -40 & -5 & 15 \\ -23 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

4. Im fünfdimensionalen komplexen Vektorraum V aus Übungsaufgabe 6.3 sei eine neue Basis C gegeben durch $C = \{c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2\}$, wobei

$$c_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx), \quad n = -2, \ldots, 2.$$

(a) Geben Sie die Matrix A der Basistransformation von B nach C an.

(b) Geben Sie die Matrix $M' = M_{C,C}(D)$ der Differentiation $D\colon V \to V$ an und bestätigen Sie die Transformationsformel für Endomorphismen $M' = A^{-1} M A$, $M = M_{B,B}(D)$. **4 P**

Lösung.

(a) Wegen
$$\begin{aligned} c_{-2}(x) &= b_3(x) - \mathrm{i}b_5(x)\\ c_{-1}(x) &= b_2(x) - \mathrm{i}b_4(x)\\ c_0(x) &= b_1(x)\\ c_1(x) &= b_2(x) + \mathrm{i}b_4(x)\\ c_2(x) &= b_3(x) + \mathrm{i}b_5(x) \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c_{-2}(x)\\ c_{-1}(x)\\ c_0(x)\\ c_1(x)\\ c_2(x)\end{pmatrix} = A^\top \begin{pmatrix} b_1(x)\\ b_2(x)\\ b_3(x)\\ b_4(x)\\ b_5(x)\end{pmatrix},$$
$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}$$

(b) Da $Dc_n(x) = c_n(x)' = \mathrm{i}n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \mathrm{i}nc_n(x)$, ist die Darstellungsmatrix $M' = M_{C,C}(D)$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $-2\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 0, \mathrm{i}, 2\mathrm{i}$. Nach den Regeln der Matrizenrechnung folgt

$$A^{-1}MA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \mathrm{i}\\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{i} & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0\\ -2\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 2\mathrm{i}\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix} = M'$$

5. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 7 & 9\end{pmatrix}$$

4 P

Lösung. Subtrahiert man nacheinander die 5. Zeile von jeder anderen , so ändert sich gemäß (D6) der Wert von $\det A$ nicht, also

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix} = 4\,.$$

Im vorletzten Schritt wurde jede Zeile zur 5. addiert (erneute Anwendung von (D6)) und abschließend (D7) benutzt.

Mit Gaußschem Algorithmus ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 18.$$

(oder auch nach Entwicklungssatz, Definition, Sarrusscher Regel)