Lösungen

Lineare Algebra für Physiker, Serie 6

Abgabe am 22.11.2007

1. Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -15 & 3 & 12 \\ -10 & 2 & 8 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

   (a) Berechnen Sie AB und BA.
   (b) Bestimmen Sie $\operatorname{Ker}(AB)$, $\operatorname{Ker}(BA)$ und geben Sie jeweils eine Basis von $\operatorname{Im} A$ und $\operatorname{Im} B$ an. **4 P**

   Lösung.

   $$\text{(a)} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 15 & -3 & -12 \\ -15 & 3 & 12 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -45 & 9 & 36 \\ -30 & 6 & 24 \\ -60 & 12 & 48 \end{pmatrix}.$$

   $$\begin{aligned} \text{(b)}\ \operatorname{Ker}(AB) &= \text{Lös}(AB,0) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 0\right\} \\ &= \{x = s(1,5,0) + t(0,-4,1) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(1,5,0),(0,-4,1)\}, \\ \operatorname{Ker}(BA) &= \text{Lös}(BA,0) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid -15x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 0\right\} \\ &= \{x = s(1,5,0) + t(0,-4,1) \mid s \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(1,5,0),(0,-4,1)\}, \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} y \in \operatorname{Im} A \Leftrightarrow y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3 &\Leftrightarrow y = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow y \in \operatorname{lin}\left\{(2,-1,-1)^\top, (-1,2,-1)^\top, (-1,-1,2)^\top\right\}. \end{aligned}$$

   $$\text{Da} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   sind die ersten beiden Spalten von A linear unabhängig und somit eine Basis von $\operatorname{Im} A$. Da die die erste und dritte Spalte von B genau das (-5) bzw. Vierfache der zweiten Spalte von B sind, ist $\operatorname{rg} B = 1$ und das Bild wird aufgespannt von $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. (a) Bestimmen Sie den Rang und den Defekt der Matrix A und verifizieren Sie für T_A den Dimensionssatz für lineare Abbildungen.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

   (b) Es sei $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Welche Paare $(\operatorname{rg} B, \operatorname{def} B)$ sind möglich? Geben Sie für jedes Paar eine Beispielmatrix B an. **4 P**

Lösung. Mittels Gaußschem Algorithmus ermittelt man

$$A=\begin{pmatrix}1&4&5&6&9\\3&-2&1&4&-1\\-1&0&-1&-2&-1\\2&3&5&7&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&5&6&9\\0&-14&-14&-14&-28\\0&4&4&4&8\\0&-5&-5&-5&-10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&5&6&9\\0&1&1&1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Somit ist $\operatorname{rg} A=2$, $\operatorname{def} A=5-\operatorname{rg} A=3$. Da $\operatorname{Im} T_A=T_A(\mathbb{R}^5)$ von den Spalten der Matrix A aufgespannt wird und die ersten beiden Spalten von A linear unabhängig sind, ergibt sich $\operatorname{Im} T_A=\operatorname{lin}\{(1,3,-1,2)^\top,(4,-2,0,3)^\top\}$ und $\operatorname{rg} T_A=\dim(\operatorname{Im} T_A)=2$. Zur Bestimmung von $\operatorname{Ker} T_A$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax=0$ zu lösen. Aus dem obigen Schema liest man ab

$$\operatorname{Ker} T_A=\text{Lös}(A,0)=\operatorname{lin}\left\{(-1,-1,1,0,0)^\top,(-2,-1,0,1,0)^\top,(-1,-2,0,0,1)^\top\right\}$$

und $\operatorname{def} T_A=\dim(\operatorname{Ker} T_A)=3$. Damit gilt

$$\operatorname{rg} T_A+\operatorname{def} T_A=\dim(\operatorname{Im} T_A)+\dim(\operatorname{Ker} T_A)=\dim\left(\mathbb{R}^5\right)=5.$$

(b) $B\in\mathbb{R}^{3\times4}$. Für $(\operatorname{rg} B,\operatorname{def} B)$

$$\begin{aligned}&=(0,4)\text{ muss } B=0 \text{ sein,}\\ &=(1,3)\text{ kann z.B. } B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ &=(2,2)\text{ kann z.B. } B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ &=(3,1)\text{ kann z.B. } B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. Es sei V der fünfdimensionale reelle Vektorraum der trigonometrischen Polynome höchstens zweiten Grades mit der Basis $B=\{1,\cos x,\cos(2x),\sin x,\sin(2x)\}$. Die Differentiation $D\colon V\to V$, gegeben durch $Df(x)=f'(x)$, ist eine lineare Abbildung.

   (a) Bestimmen Sie die Matrix $M_{B,B}(D)$ von D bezüglich der gegebenen Basis B.

   (b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\operatorname{Im} D$ und $\operatorname{Ker} D$. Welchen Rang hat D? Ist D invertierbar? **4 P**

   Lösung. (a) Es ist $1'=0$, $(\cos x)'=-\sin x$, $(\sin x)'=\cos x$, $\cos(2x)'=-2\sin(2x)$, $\sin(2x)'=2\cos(2x)$ und somit mit

$$b_1=1,\quad b_2=\cos x,\quad b_3=\cos(2x),\quad b_4=\sin x,\quad b_5=\sin(2x)$$

$$D(b_1)=0,\quad D(b_2)=-b_4,\quad D(b_3)=-2b_5,\quad D(b_4)=b_2\quad D(b_5)=2b_3.$$

Somit lautet die Matrix von D bezüglich der Basis B

$$M_{B,B}(D)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&2\\0&-1&0&0&0\\0&0&-2&0&0\end{pmatrix}$$

(b) $\operatorname{Im} D = D(V) = \operatorname{lin}\{\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x)\} \Rightarrow \operatorname{rg} D = \dim(\operatorname{Im} D) = 4$,

$\operatorname{Ker} D = \left\{ f \in V \,\middle|\, Df = 0 \right\} = \operatorname{lin}\{1\} \Rightarrow \operatorname{def} D = \dim(\operatorname{Ker} D) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \quad D$ nicht invertierbar.

4. Gegeben sei die lineare Abbildung $I: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$, $I(p) = \int_0^3 p(x)\,\mathrm{d}x$.

   (a) Bestimmen Sie die Matrix $M_{B,C}(I)$ von I bezüglich der Basen $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ von $\mathbb{R}_3[x]$ bzw. $C = \{1\}$ von $\mathbb{R}$.

   (b) Geben Sie eine Basis von $\operatorname{Ker} I$ an und bestimmen Sie $\operatorname{Im} I$. **4 P**

   Lösung. **Diese Lösung arbeitet mit einer anderen oberen Schranke des Integrals: $I(p) = \int_0^2 p(x)\,\mathrm{d}x$.**

   (a) Es ist $I(1) = 2$, $I(x) = 2$, $I(x^2) = \frac{8}{3}$, $I(x^3) = 4$ und somit $M_{B,C}(I) = \left(2, 2, \frac{8}{3}, 4\right) \in \mathbb{R}^{1\times 4}$.

   (b) $\operatorname{Im} I = \operatorname{lin}\{1\} = \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} I = \dim(\operatorname{Im} I) = 1$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} I &= \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] \,\middle|\, p(x) = \sum_{j=0}^{3} \lambda_j x^j,\ I(p) = 2\lambda_0 + 2\lambda_1 + \frac{8}{3}\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \right\} \\
&= \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] \,\middle|\, p(x) = -(\lambda_1 + \frac{4}{3}\lambda_2 + 2\lambda_3)x^0 + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j x^j,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{lin}\left\{ x - 1, x^2 - \frac{4}{3}, x^3 - 2 \right\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{def} I = \dim(\operatorname{Ker} I) = 3.
\end{aligned}$$

5. Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Zeigen Sie, dass gilt

   (a) $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} A$.

   (b) $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} B$.

   (c) Geben Sie ein Beispiel an, wo sowohl in (a) als auch in (b) jeweils das $<$-Zeichen steht.

   5 P

   Lösung. (a) Folgende einfache Betrachtung führt zu der Ungleichung $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} A$: Wenn $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so gilt wegen der Verkettung von A und B die Inklusion
   $\operatorname{Im} T_B \subset \mathbb{R}^m$ und

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} T_{AB} = \operatorname{Im}(T_A \circ T_B) = T_A(\operatorname{Im} T_B) \subset T_A(\mathbb{R}^m) = \operatorname{Im} T_A \\
\Rightarrow \quad \operatorname{rg}(AB) = \dim(\operatorname{Im} T_{AB}) \leq \dim(\operatorname{Im} T_A) = \operatorname{rg} A
\end{aligned}$$

   (b) Wegen Spaltenrang gleich Zeilenrang ergibt sich aus dieser Ungleichung

$$\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}\left((AB)^\top\right) = \operatorname{rg}\left(B^\top A^\top\right) \leq \operatorname{rg}\left(B^\top\right) = \operatorname{rg} B.$$

   (c) Wählt man $A = (1 \quad 0) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so ist $AB = BA = 0$ und somit $\operatorname{rg} AB = 0$. Aber es ist $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1$.