Lösungen

Lineare Algebra für Physiker, Serie 5

Abgabe am 15.11.2007

1. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität über $\mathbb{K}$.

$$\begin{array}{llll} (a)\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, & T_1(x,y) = (3x+2y, x), & (b)\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & T_2(x) = ax+b, \\ (c)\ \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}, & T_3(x,y) = x + \sqrt{2}y, & (d)\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, & T_4(z) = \overline{z}, \\ (e)\ \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, & T_5(f) = f(1), & (f)\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, & T_6(z) = \overline{z}, \end{array}$$

dabei seien in (b) $a, b \in \mathbb{R}$ gegebene reelle Zahlen, in (c) sei der Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und in (d) sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; in allen anderen Fällen sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. **6 P**

Lösung. Es ist jeweils zu überprüfen, ob bei den gegebenen Abbildungen das Bild einer Linearkombination zweier Vektoren gleich der Linearkombination der Bilder dieser Vektoren ist. Dazu sei $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(a) $T_1\left(\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)\right) = T_1(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$
$= \left(3(\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2), \lambda x_1 + \mu x_2\right) = \lambda(3x_1 + 2y_1, x_1) + \mu(3x_2 + 2y_2, x_2)$
$= \lambda T_1(x_1,y_1) + \mu T_1(x_2,y_2)$

(b) Da $T_2(0) = b$, ist T_2 nur linear für $b = 0$.

(c) $T_3\left(\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)\right) = T_3(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$
$= \lambda x_1 + \mu x_2 + \sqrt{2}(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x_1 + \sqrt{2}y_1) + \mu(x_2 + \sqrt{2}y_2)$
$= \lambda T_1(x_1,y_1) + \mu T_1(x_2,y_2)$

(d) Da $T_4(\lambda z) = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda}\bar{z}$, ist T_4 nicht linear, z.B. $T_4(i \cdot 1) = -i \cdot 1 \neq i\, T_4(1)$.

(e) $T_5(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda T_5(f) + \mu T_5(g)$

(f) $T_6(\lambda z + \mu w) = \overline{(\lambda z + \mu w)} = \bar{\lambda}\bar{z} + \bar{\mu}\bar{w} = \lambda\bar{z} + \mu\bar{w} = \lambda T_6(z) + \mu T_6(w)$

2. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität über $\mathbb{R}$.

(a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,
(b) $S\colon \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$, $S(A) = B \cdot A$, wobei $B \in \mathbb{R}^{2\times2}$ eine gegebene Matrix ist.
(c) $F\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $F(ax^2 + bx + c) = (a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$.
(d) $G\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $(Gp)(x) = p(x-1)$.
(e) $H\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $H(A) = A^\top$.
(f) lim: $c \to \mathbb{R}$, $\lim((x_n)) = \lim_{n\to\infty} x_n$, dabei sei $c \subset \omega$ der Raum der konvergenten reellen Folgen. **6 P**

Lösung.

(a) $T(\lambda(x_1,x_2,x_3)) = T(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$
$= \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + (\lambda x_3)^2} = |\lambda|\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = |\lambda| T(x_1,x_2,x_3)$,
also speziell $T((-1)(1,1,1)) = 1\cdot\sqrt{3} \neq (-1)T(1,1,1)$. Folglich ist T nicht linear.

(b) $S(\lambda A_1 + \mu A_2) = B\cdot(\lambda A_1 + \mu A_2) = \lambda B\cdot A_1 + \mu B\cdot A_2 = \lambda S(A_1) + \mu S(A_2)$

(c) Da $(F(0))(x) = (0+1)x^2 + (0+1)x + (0+1) = x^2+x+1 \neq 0$ ist F nicht linear.

(d) $\big(G(\lambda p + \mu q)\big)(x) = (\lambda p + \mu q)(x-1) = \lambda p(x-1) + \mu q(x-1)$
$= \lambda\big(G(p)\big)(x) + \mu\big(G(q)\big)(x)$

(e) $H(\lambda A_1 + \mu A_2) = (\lambda A_1 + \mu A_2)^\top = \lambda A_1^\top + \mu A_2^\top = \lambda H(A_1) + \mu H(A_2)$

(f) Sei $(x_n),(y_n)\in c$, so ist auch die Folge (z_n), $z_n := \lambda x_n + \mu y_n$, konvergent mit
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} y_n \quad\Rightarrow$
$\lim(\lambda(x_n)) + \mu(y_n)) = \lim((z_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lambda\lim((x_n)) + \mu\lim((y_n))$

3. Die Vektoren $b_1 = (1,2,1)$, $b_2 = (2,9,0)$ und $b_3 = (3,3,4)$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$T(b_1) = (1,0), \quad T(b_2) = (-1,1), \quad T(b_3) = (0,1).$$

Bestimmen Sie $T(7,13,7)$, $T(x_1,x_2,x_3)$ und $T(0,3a^2+2b^2,2a^2-b^2)$. **3 P**

Lösung. **Achtung: Die Zahlen wurden geändert.** Jedes $x\in\mathbb{R}^3$ besitzt die Darstellung $x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$ mit eindeutig bestimmten $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Wegen der Linearität von T gilt

$$T(x) = \lambda_1 T(b_1) + \lambda_2 T(b_2) + \lambda_3 T(b_3).$$

Somit müssen diese Koordinaten λ_j eines Vektor x bez. der Basis b_1,b_2,b_3 bestimmt werden. Es ist

$$(7,13,7) = -b_1 + b_2 + 2b_3 \quad\Rightarrow\quad T(7,13,7) = -(1,0) + (-1,1) + 2(0,1) = (-2,3)$$

Für den allgemeinen Fall bestimmen wir die Darstellung der Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ bez. der Basis b_1,b_2,b_3:

$$e_1 = -36b_1 + 5b_2 + 9b_3,\ e_2 = 8b_1 - b_2 - 2b_3,\ e_3 = 21b_1 - 3b_2 - 5b_3.$$

Wegen $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ ist dann

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -36x_1 + 8x_2 + 21x_3,\ \lambda_2 = 5x_1 - x_2 - 3x_3,\ \lambda_3 = 9x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ \Rightarrow\ T(x_1,x_2,x_3) &= \lambda_1(1,0) + \lambda_2(-1,1) + \lambda_3(0,1) \\ &= (-41x_1 + 9x_2 + 24x_3, 14x_1 - 3x_2 - 8x_3) \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Koordinaten der Vektoren $(7,13,7), e_1, e_2, e_3$ bez. der Basis b_1,b_2,b_3 können mittels Gaußschem Algorithmus aus linearen Gleichungssystemen bestimmt werden, die alle dieselbe Koeffizientenmatrix haben. Deshalb kann deren Lösung simultan erfolgen, indem man die verschiedenen rechten Seiten gleichzeitig mit umformt.

4. Gegeben seien die Abbildungen $T_1 \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ über

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix}, \quad T_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \\ 3y_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie Matrizen A_1, A_2 mit $T_1(x) = A_1 x$, $x \in \mathbb{R}^4$, und $T_2(y) = A_2 y$, $y \in \mathbb{R}^2$ (Matrixprodukt).
(b) Bestimmen Sie $T_2 \circ T_1$ und $A_2 A_1$. **3 P**

5. Eine Matrix quadratische $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn gilt $A^\top = A$, sie heißt *schiefsymmetrisch*, wenn gilt $A^\top = -A$. Die Menge der symmetrischen n-reihigen Matrizen bezeichnen wir mit $\operatorname{sym}(n)$, die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen mit $\operatorname{alt}(n)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{sym}(n)$ und $\operatorname{alt}(n)$ Unterräume von $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind, bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimensionen der Räume.

(b) Zeigen Sie: Ist $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $S := \frac{1}{2}(B + B^\top)$ symmetrisch und $A := \frac{1}{2}(B - B^\top)$ schiefsymmetrisch.

(c) Zeigen Sie: $\mathbb{R}^{n\times n} = \operatorname{sym}(n) \oplus \operatorname{alt}(n)$. **3 + 1 + 2 P**

Lösung. (a) Wir zeigen, dass jeweils das Unterraumkriterium erfüllt ist. Beide Räume sind nichtleer, da die Nullmatrix sowohl symmetrisch als auch schiefsymmetrisch ist: $0^\top = 0 = -0^\top$.
Da das Transponieren eine lineare Abbildung ist, siehe Aufgabe Serie 5.2 (e), gilt für alle $A_1, A_2 \in \operatorname{sym}(n)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^\top = \lambda_1 A_1^\top + \lambda_2 A_2^\top = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2.$$

Folglich gilt $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in \operatorname{sym}(n)$. Damit ist die Bedingung (L) des Unterraumkriteriums erfüllt und $\operatorname{sym}(n)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$. Analog folgt aus $A_1, A_2 \in \operatorname{alt}(n)$, dass

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^\top = \lambda_1 A_1^\top + \lambda_2 A_2^\top = -\lambda_1 A_1 - \lambda_2 A_2 = -(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2).$$

Somit gilt also $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in \operatorname{alt}(n)$ und $\operatorname{alt}(n)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Für alle B gilt wegen der Linearität des Transponierens und wegen $(B^\top)^\top = B$

$$S^\top = \left(\frac{1}{2}\left(B + B^\top\right)\right) = \frac{1}{2}\left(B^\top + (B^\top)^\top\right) = \frac{1}{2}\left(B^\top + B\right) = S;$$

also ist $S \in \operatorname{sym}(n)$. Analog ist

$$A^\top = \left(\frac{1}{2}\left(B - B^\top\right)\right) = \frac{1}{2}\left(B^\top - (B^\top)^\top\right) = \frac{1}{2}\left(B^\top - B\right) = -A;$$

Somit gilt $A \in \operatorname{alt}(n)$.

(c) Wegen (b) gilt für alle $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$B = \frac{1}{2}\left(B + B^\top\right) + \frac{1}{2}\left(B - B^\top\right) = S + A \in \operatorname{sym}(n) + \operatorname{alt}(n).$$

Jede quadratische Matrix B lässt sich also als Summe einer symmetrischen Matrix S und schiefsymmetrischen Matrix A darstellen. Nach Bemerkung 2.5 (b) ist die Summe $U+V$ zweier Unterräume genau dann direkt, wenn $U \cap V = \{0\}$. Sei also $C \in \mathrm{sym}(n) \cap \mathrm{alt}(n)$, das heißt

$$C^\top = C \quad \text{und} \quad C^\top = -C.$$

Damit gilt aber $C = -C$ also $2C = 0$, also $C = 0$. Die Nullmatrix ist die einzige quadratische Matrix, die sowohl symmetrisch als auch schiefsymmetrisch ist. Die Summe ist somit direkt.