Lösungen

Lineare Algebra für Physiker, Serie 4

Abgabe am 8. 11. 2007

1. Gegeben seien zwei Unterräume U_1 und U_2 von $\mathbb{R}^3$. Dabei sei $U_1 = \text{lin}\{(2,1,0),(1,2,3),(1,0,-1)\}$ und $U_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$.

   (a) Geben Sie eine Basis von U_1 an.
   (b) Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren $b_1 = (-2,-1,1)$ und $b_2 = (\lambda, 3-\lambda^2, 1)$ eine Basis von U_2?
   (c) Geben Sie die Koordinaten von $v = (-3,9,5) \in U_2$ bezüglich der in (b) gefundenen Basen an.
   (d) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

5 P

Lösung. (a) Mit dem Gaußverfahren kann man eine Basis von U_1 bestimmen. Wir benutzen die Methode aus 2.3.6 und schreiben die drei Vektoren zeilenweise auf:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen zunächst die 1., 2. und 3.Zeile zyklisch, addieren dann das (-2)fache der ersten Zeile zur 2.Zeile und das (-1)fache der ersten Zeile zur 3.Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erkennen, dass die 3.Zeile das Doppelte der 2.Zeile ist, also im nächsten Gauß-Schritt zur Nullzeile wird: Somit bilden $c_1 = (1,0,-1)$ und $c_2 = (0,1,2)$ eine Basis von U_1.

(b) Es gilt $b_2 \in U_2$ gdw. $3\lambda - (3-\lambda^2) + 3 = 0$, also gdw. $\lambda = 0$ oder $\lambda = -2$. Im ersten Fall ist $b_2 = (0,3,1)$ und im zweiten Fall ist $b_2 = (-2,-1,1) = b_1$. Im zweiten Fall liegt keine Basis vor, da U_2 zweidimensional ist. Im ersten Fall liegt eine Basis vor, da $\{b_1, b_2\}$ linear unabhängig ist und somit eine Basis von U_2 (denn $\text{lin}\{b_1,b_2\} \subset U_2$ und die Dimensionen beider Teilräume stimmen überein. Nach Lemma 8 (c) gilt dann $\text{lin}\{b_1,b_2\} = U_2$.)

(c) Der Ansatz $(-3,9,5) = \alpha_1(-2,-1,1) + \alpha_2(0,3,1)$ führt nach Vergleich der 3. Koordinate sofort auf $-3 = -2\alpha_1 + 0$ also $\alpha_1 = 3/2$. Setzt man dies in der ersten Koordinate ein, so hat man $5 = 3/2 + \alpha_2$ bzw. $\alpha_2 = 7/2$. Somit lauten die Koordinaten von v bzgl. der gefundenen Basis $(3/2, 7/2)$.

(d) Die Parametergestalt der Ebene U_1 lautet: $(x_1,x_2,x_3) = t(-1,0,1) + s(2,1,0) = (2s-t, s, t)$, $s,t \in \mathbb{R}$. Setzt man dies in die Gleichung von U_2 ein, so hat man:

$$0 = 2(2s-t) - s + 3t = t + 3s \Longrightarrow t = -3s \Longrightarrow (x_1,x_2,x_3) = (2s-t, s, t) = (5s, s, -3s) = s(5,1,-3).$$

Somit ist $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}(1,5,-3)$ eindimensional; $B = \{(5,1,-3)\}$ ist eine Basis.

2. Es sei V ein reeller Vektorraum und $a, b, c, d, e \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren

$$v_1 = a+b+c, \qquad v_2 = 2a+2b+2c-d, \qquad v_3 = a-b-e,$$
$$v_4 = 5a+7b+d-e, \qquad v_5 = a-c+3e, \qquad v_6 = 2a+2b+2c+d+e,$$

linear abhängig sind. **3 P**

Beweis. Aus Lemma 4 (c) und (d) folgt: Jedes Erzeugendensystem für V hat mindestens $\dim V$ Elemente. Jede linear unabhängige Menge hat höchstens $\dim V$ Elemente. Da $W := \operatorname{lin}\{a, b, c, d, e\}$ von 5 Vektoren aufgespannt wird, kann W höchstens die Dimension 5 haben. Eine linear unabhängige Menge in W kann höchstens $\dim W \le 5$ Elemente haben. Folglich sind beliebige 6 Vektoren in W linear abhängig. ■

3. Gegeben seien im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren $v_1 = (4,1,1,0)$, $v_2 = (0,1,4,-1)$, $v_3 = (4,3,9,-2)$, $v_4 = (1,1,1,1)$ und $v_5 = (0,-2,-8,2)$.

   (a) Bestimmen Sie eine Basis von $U = \operatorname{lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.
   (b) Wählen Sie alle möglichen Basen von U aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ aus und kombinieren Sie jeweils die restlichen Vektoren v_i aus dieser Basis.

6 P

Lösung. (a) Wendet man den Gaußalgorithmus an auf die Matrix, gebildet aus den 5 Zeilenvektoren $v_1, \ldots, v_5$, so erhält man zwei Nullzeilen und 3 linear unabhängige Zeilen, etwa

$$b_1 = (1,1,1,1),\ b_2 = (0,1,4,-1),\ b_3 = (0,0,9,-7).$$

$B = \{b_1, b_2, b_3\}$ ist eine Basis von U.

(b) Der Gaußalgorithmus liefert auch die beiden Relationen im gegebenen Vektorsystem:

$$v_5 + 2v_2 = 0, \quad v_1 + 2v_2 - v_3 = 0. \tag{1}$$

Somit erhält man eine Basis von U, wenn man zu v_4 noch beliebige zwei Vektoren aus v_1, v_2, v_3 auswählt. Dabei kann man v_2 durch v_5 ersetzten. Also bilden eine Basis v_4 zusammen mit

$$\{v_1, v_2\},\ \{v_1, v_3\},\ \{v_2, v_3\},\ \{v_1, v_5\},\ \{v_5, v_3\}.$$

Es gibt also 5 Möglichkeiten, eine Basis auszuwählen. Die Darstellung der jeweils übrig gebliebenen Vektoren folgt aus (1). Etwa gilt im ersten Fall $v_3 = v_1 + v_2$, $v_5 = v_2$.

4. Geben Sie für die folgenden Untervektorräume jeweils eine Basis an. Weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebenen Mengen tatsächlich linear unabhängig und erzeugend sind.

   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 3x_2\}$.
   (b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
   (c) $\operatorname{lin}\{x^2, x^2 - x, x^2 + 1, x^2 + x + 1, x^9 + x^5\} \subset \mathbb{R}[x]$.
   (d) $\{f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \quad \text{für alle bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$.

8 P

Lösung. (a) Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus ermittelt man die allgemeine Lösung $\text{Lös}(A,0)$ dieses homogenen lin. GS und erhält eine Ebene durch Null: $(3s,s,t) = s(3,1,0)+t(0,0,1)$, $s,t\in\mathbb{R}$. Somit erzeugen die Vektoren $(3,1,0)$ und $(0,0,1)$ den Lösungsraum. Sie sind linear unabhängig, weil keiner ein Vielfaches des anderen ist. Sie bilden also eine Basis.

(b) Mit Hilfe des Gaußalgorithmus lösen wir das homogene 2×4 Gleichungssystem indem wir es auf die reduzierte Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Somit lautet die 2-parametrische Lösung des homogenen lin. GS:

$$x_1 = -\frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4, \quad x_2 = \frac{1}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{C}.$$

Dabei sind x_3 und x_4 frei wählbar in $\mathbb{C}$. Wählt man etwa $x_3 = 5$, $x_4 = 0$, so erhält man den ersten Spannvektor $b_1 = (-3,1,5,0)$, Wählt man $x_3 = 0$ und $x_4 = 5$, so hat man einen zweiten Spannvektor $b_2 = (2,-4,0,5)$. Die beiden Vektoren b_1 und b_2 bilden eine Basis des Unterraumes.

(c) Die ersten drei Elemente erzeugen alle Polynome, die höchstens den Grad 2 haben, Die lineare Hülle der ersten 4 Polynome stimmt also mit der linearen Hülle von $\{1,x,x^2\}$ überein. Da das letzte Basiselement ein Polynom 9.Grades ist, ist es linear unabhängig zu den anderen. Damit ist eine Basis des Raumes $\{1,x,x^2,x^9+x^5\}$.

(d) $B = \{f_a \in \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid a\in\mathbb{R},\, f_a(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x\neq a,\, f_a(a) = 1\}$ ist eine Basis des angegebenen Unterraumes, denn jede Funktion, die nur an endlich vielen Stellen $a_1,\dots,a_r$ von Null verschieden ist und dort die Werte $c_1,\dots,c_r\in\mathbb{R}$ annimmt, lässt sich mit Hilfe der Basiselemente als Linearkombination

$$f = c_1 f_{a_1} + c_2 f_{a_2} + \cdots + c_r f_{a_r}$$

schreiben. Damit ist B erzeugend. Ist umgekehrt für gewisse c_i

$$f := c_1 f_{a_1} + c_2 f_{a_2} + \cdots + c_r f_{a_r} = 0,$$

so gilt an der Stelle $x = a_1$,

$$f(a_1) = c_1 f_{a_1}(a_1) + \cdots c_r f_{a_r}(a_r) = c_1 + 0 + \cdots + 0 \overset{!}{=} 0,$$

woraus sofort $c_1 = 0$ folgt. Setzt man nacheinander die anderen Stellen $a_2,\dots,a_r$ ein, so ergibt sich analog $c_2 = c_3 = \cdots = c_r = 0$; B ist linear unabhängig und somit Basis.