Lösungen

Lineare Algebra für Physiker, Serie 3

Abgabe am 1.11.2007

1. Bestimmen sie ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, das die folgenden Bedingungen erfüllt: $p(-1) = p(1) = 4$, $p(3) = -92$, $p(-2) = -2$. **3 P**

   Lösung. $p(x) = -2x^3 - 6x^2 + 2x + 10$.

   Setzt man nacheinander die x-Werte ein, so erhält man ein lineares 4×4 GS

$$
\begin{aligned}
p(1) &= d + c + b + a = 4 \\
p(-1) &= d - c + b - a = 4 \\
p(3) &= d + 3c + 9b + 27a = -92 \\
p(-2) &= d - 2c + 4b - 8a = -2
\end{aligned}
$$

   Durch Vertauschen der Variablenreihenfolge zu d, c, b, a nimmt die erweiterte Koeffizientenmatrix die folgende Gestalt an. Im ersten Schritt addieren wir das (-1) fache der ersten Zeile zu allen anderen Zeilen:

1	1	1	1	4	$\mid(-1)$
1	-1	1	-1	4	
1	3	9	27	-92	
1	-2	4	-8	-2	

1	1	1	1	4	
0	-2	0	-2	0	:(-2)
0	2	8	26	-96	:2
0	-3	3	-9	-6	:(-3)

1	1	1	1	4
0	1	0	1	0
0	1	4	13	-48
0	1	-1	3	2

1	1	1	1	4
0	1	0	1	0
0	0	4	12	-48
0	0	-1	2	2

1	1	1	1	6
0	1	0	1	0
0	0	1	3	-12
0	0	0	5	-10

1	0	0	0	10
0	1	0	0	-2
0	0	1	0	-6
0	0	0	1	-2

   Dies ist die oben angegebene Lösung. Es gibt genau ein kubisches Polynom durch diese vier Punkte.

2. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Begründen Sie Ihre Antwort.
(a) $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 4x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$
(b) $U_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^4 + x_2^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. **5 P**
(c) $U_3 = \{(\lambda - \mu, \lambda^2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.
(d) $U_4 = \{(\lambda - \mu, \lambda^2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$.
(e) $U_5 = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \ \forall x \in \mathbb{R}: f(-x) = -f(x)\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Lösung. (a) U_1 ist Unterraum. Genauer, $U_1 = \{s(4,1,2) \mid s \in \mathbb{R}\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt.

Begründung 1. $U_1 = \mathrm{Lös}(A, 0)$ ist Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems aus 2 Gleichungen mit 3 Variablen; $x_1 - 4x_2 = 0, x_1 - 2x_3 = 0$.

Begründung 2. Dirketer Beweis mit dem Unterraumkriterium:

$U_1 \neq \emptyset$, denn $(0,0,0) \in U_1$. Seien $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in U_1$ dann gilt auch $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in U_1$, denn

$$x_1 + y_1 = 4x_2 + 4y_2 = 2(x_3 + y_3)$$

folgt aus $x_1 = 4x_2 = 2x_3$ und $y_1 = 4y_2 = 2y_3$ durch Addition. Analog folgt $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \in U_1$ durch Multiplikation der ersten Gleichung mit λ.

(b) U_2 ist ein linearer Teilraum, denn U_2 besteht nur aus dem Nullvektor $(0,0)$. In der Tat ist die einzige reelle Lösung von $x_1^4 + x_2^2 = 0$ wegen $x_1^4 + x_2^2 \geq 0$ das Paar $(0,0)$.

(c) kein Unterraum, denn $(1,1) \in U_3$ aber $(-1)(1,1) = (-1,-1) \notin U_3$, da $\lambda^2 = -1$ keine reelle Lösung hat.

(d) $U_4 = \mathbb{C}^2$, also ist U_4 komplexer Teilraum von $\mathbb{C}^2$. In der Tat erhält man in der zweiten Komponente jede komplexe Zahl $z_2 = \lambda^2$, indem man für λ eine der beiden komplexen Quadratwurzeln aus z_2 wählt; das Wurzelziehen ist im Komplexen stets möglich. Die Koordinate $z_1 = \lambda + \mu$ erhält man, wenn man dann $\mu = z_1 - \lambda$ wählt.

(e) U_5 ist Teilraum. Das Unterraumkriterium ist erfüllt, denn $0 \in U_5$, die Nullfunktion erfüllt die Bedingung $-f(x) = 0 = f(-x)$ für alle x. Seien $f, g \in U_5$, also $-f(x) = f(-x)$ und $-g(x) = g(-x)$ für alle x. Bildet man die Summe, so hat man $f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x)$, also $-(f+g)(x) = (f+g)(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist $f + g \in U_5$. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt überdies $-\lambda f(x) = \lambda f(-x)$, also $(-\lambda f)(x) = (\lambda f)(-x)$, was besagt, dass auch $\lambda f \in U_5$. Das Unterraumkriterium ist erfüllt; U_5 ist Teilraum.
U_5 bezeichnet man als den Raum der *ungeraden Funktionen*. Alle ungeraden Potenzfunktionen $f(x) = x^{2n+1}$ sind ungerade, wie auch $\sin nx$. Entsprechend nennt man Funktionen, die $f(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen *gerade*. Auch sie bilden einen linearen Teilraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. (a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(1,3,4)$, $(3,t,11)$, $(-1,-4,0)$ ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^3$.

(b) Stellen Sie $w \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination von v_1, v_2 und v_3 dar.

$$w = (6,2,1), \quad v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (7,3,1), \quad v_3 = (2,5,8).$$

4 + 2 P

Lösung. (a) Das System ist erzeugend, genau dann, wenn das lineare GS

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | \, b_1 \\ 3 & t & -4 & | \, b_2 \\ 4 & 11 & 0 & | \, b_3 \end{pmatrix}$$

für jede rechte Seite (b_1, b_2, b_3) eine Lösung besitzt. Dies ist genau dasnn der Fall, wenn $t \neq 37/4$. In diesem Fall liefert der Gauß-Algorithmus drei führende Einsen und eine eindeutige Lösung.

Im Falle $t = 37/4$ ist etwa $(0,0,1)$ nicht von den drei Vektoren erzeugt.

4. Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (a) Es seien U_1, U_2, U_3 lineare Teilräume des Vektorraumes V. Dann ist $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ ebenfalls ein linearer Teilraum von V.

   (b) Es seien U_1, U_2, U_3 lineare Teilräume des Vektorraumes V. Dann ist $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ ebenfalls ein linearer Teilraum von V.

   (c) Wie viele Untervektorräume hat $\mathbb{R}^2$

      (1) zwei: $\{0\}$ und $\mathbb{R}^2$.

      (2) vier: $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$, $\{0\} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \times \{0\}$ (die Koordinatenachen).

      (3) Unendlich viele (Begründung!).

6 P

Beweis. (a) Wir zeigen, dass das Unterraumkriterium für den Durchschnitt einer beliebigen Familie U_i, $i \in I$, erfüllt ist. Sei $U := \bigcap_{i \in I} U_i$. Klar ist $0 \in U$, denn der Nullvektor ist in jedem Teilraum U_i, $i \in I$ enthalten und somit auch im Durchschnitt. Seien $x, y \in U$, das heißt $x, y \in U_i$ für alle $i \in I$. Da U_i ein Unterraum ist, enthält er mit x und y auch alle Linearkombinationen von Elementen x, y, also $\lambda x + \mu y \in U_i$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und für alle $i \in I$. Folglich gilt $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i \in I} U_i$. Das Unterraumkriterium ist gezeigt, U ist Teilraum von V. ■

(b) $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ ist im Allgemeinen kein Unterraum. Gegenbeispiel: $V = R^2$, $U_1 = U_2 = \text{lin}(1,0)$, $U_3 = \text{lin}(0,1)$. Dann ligen in $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ genau die Vektoren, bei denen mindestens eine Koordinate gleich Null ist – die Vereinigung der beiden Koordinatenachsen. Die Summe von Elementen liegt aber i. a. nicht in U, denn $(1,0) + (0,1) = (1,1)$ liegt nicht in U.

(c) Alle drei Aussagen sind richtig, denn der $\mathbb{R}^2$ hat (mindestens) zwei Unterräume, mindestens 4 Unterräume, sogar unendlich viele Unterräume und zwar zu $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

$$U_a := \text{lin}(a, 1).$$

Alle diese Räume sind tatsächlich voneinander verschieden; angenommen $U_a = U_b$ mit $a, b \in R$. Dann gilt $(b,1) \in U_a$, also existiert ein h$\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(b,1) = \lambda(a,1) = (\lambda a, \lambda)$. Aus dem Vergleich der zweiten Koordinaten folgt $\lambda = 1$, aus dem Vergleich der ersten folgt $a = b$. Es gibt daher unendlich viele solche Räume $\{U_a \mid a \in \mathbb{R}\}$.

5. Es sei φ die Menge der *finiten* reellen Zahlenfolgen (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$,

$$\varphi := \{x = (x_n) \mid \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N} : k > m \Longrightarrow x_k = 0\}.$$

Mit anderen Worten, φ besteht aus allen reellen Zahlenfolgen, die von einer gewissen Stelle ab nur noch Nullen haben, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots)$, wobei dies m von der Folge (x_n) abhängt.

Zeigen Sie, dass φ ein reeller Vektorraum ist.
Hinweis: Benutzen Sie, dass $\omega = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und $\varphi \subset \omega$. **4 P**

Beweis. (a) $\varphi \neq \emptyset$, denn die Nullfolge $(0, 0, \dots)$ ist eine finite Zahlenfolge.
(b) Seien $(x_n), (y_n) \in \varphi$. Wir zeigen, dass dann auch $(x_n) + (y_n)$ und $\lambda(x_n)$ in φ liegen. Zunächst existieren Zahlen $m_1, m_2 > 0$ so dass

$$\forall\, n > m_1 : x_n = 0, \ \ \forall\, n > m_2 : y_n = 0.$$

Ist $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$, so hat man für alle $n > m_0$: $(x + y)_n 0 x_n + y_n = 0$ und analog $(\lambda x)(n) = \lambda x_n = 0$.

Damit ist die Folge $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ ebenfalls finit. und auch die Folge $(\lambda x)_n$. ∎