# Lösungen

## Lineare Algebra für Physiker, Serie 2

### Abgabe am 25.10.2007

1. Es seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B, C \in \mathbb{K}^{n\times p}$ und $D \in \mathbb{K}^{p\times q}$ gegeben. **9 P**

   (a) Beweisen Sie das Distributivgesetz $A(B+C) = AB + AC$.
   (b) Beweisen Sie $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
   (c) Beweisen Sie das Distributivgesetz $(B+C)D = BD+CD$. Finden Sie, wenn möglich, einen Beweis, der (a) und (b) benutzt und nicht die Matrixelemente.

   *Hinweis:* Berechnen Sie in (a) und (b) die Matrixelemente der beiden Seiten und vergleichen Sie diese.

   *Beweis.* (a) Es seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{jk})$ die gegebenen Matrizen. Nach Definition des Produktes ermitteln sich die Matrixelemente $(A(B+C))_{ik}$ für alle $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, p$ wiefolgt. In der ersten Zeile benutzen wir auch die Definition von $B + C$.

$$\begin{aligned}(A(B+C))_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(B+C)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk}+a_{ij}b_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} \qquad (1) \\ &= (AB)_{ik} + (AC)_{ik} = (AB+AC)_{ik},\end{aligned}$$

   wobei wir in der letzten Zeile erneut von der Definition der Summe von Matrizen Gebrauch machten. In (1) benutzten wir das Distributivgesetz in $\mathbb{K}$.

   (b) Analog zu (a) berechnen wir die Matrixelemente von $(AB)^\top$ und von $B^\top A^\top$:

$$((AB)^\top)_{ki} = (AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

   Andererseits ist

$$(B^\top A^\top)_{ki} = \sum_{j=1}^{n}(B^\top)_{kj}(A^\top)_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}a_{ij}.$$

   Wegen des Kommutativgesetzes (M2) in $\mathbb{K}$, sind die beiden Summen gleich.

   (c) Wir benutzen (a) und (b) zum Beweis sowie $(A^\top)^\top = A$ und $(B+C)^\top = B^\top + C^\top$:

$$\begin{aligned}(B+C)D &= (((B+C)D)^\top)^\top = (D^\top(B^\top + C^\top))^\top = (D^\top B^\top + D^\top C^\top)^\top = (D^\top B^\top)^\top + (D^\top C^\top)^\top \\ &= B^{\top\top}D^{\top\top} + C^{\top\top}D^{\top\top} = BD + CD.\end{aligned}$$

   ∎

2. Lösen Sie das folgende lineare $2\times 2$ Gleichungssystem **6 P**

$$\begin{aligned}(4+7\mathrm{i})z_1 + (3-5\mathrm{i})z_2 &= 22-9\mathrm{i} \\ (5+3\mathrm{i})z_1 + (2+6\mathrm{i})z_2 &= 33-7\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Geben Sie jeweils den Real- und Imaginärteil von $z_1$ bzw. $z_2$ an.

*Lösung.* Nach der Cramerschen Regel ist

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 22-9i & 5-3i \\ 33-7i & 4+7i \end{vmatrix}}{|A|} \qquad z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2-6i & 22-9i \\ 3-5i & 33-7i \end{vmatrix}}{|A|},$$

wobei

$$|A| = \begin{vmatrix} 4+7i & 3-5i \\ 5+3i & 2+6i \end{vmatrix} == -64+54i.$$

Andererseits ist

$$\begin{vmatrix} 22-9i & 5-3i \\ 33-7i & 4+7i \end{vmatrix} = 34+300i, \qquad \begin{vmatrix} 2-6i & 22-9i \\ 3-5i & 33-7i \end{vmatrix} = 44+182i.$$

Somit gilt

$$z_1 = \frac{34+300i}{-64+54i} = 2-3i, \qquad z_2 = \frac{44+182i}{-64+54i} = 1-2i.$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

3. Die folgenden erweiterten Koeffizientenmatrizen liegen in reduzierter Zeilenstufenform vor: **5 P**

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 7 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie die zugehörigen linearen Gleichungssysteme. Geben Sie eine geometrische Interpretation der Lösungsmenge an.

Die folgenden erweiterten Koeffizientenmatrizen liegen in Zeilenstufenform vor

$$\text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & | & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die zugehörigen linearen Gleichungssysteme. Geben Sie eine geometrische Interpretation der Lösungsmenge an.

**(bitte wenden!)**

*Lösung.* (a) Wir bezeichnen die gesuchten Variablen mit $x_1, x_2, x_3$. Dann lautet die 3. Zeile der reduzierten Zeilenstufenform: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 7$. Diese Gleichung besitzt keine Lösung. Das Gleichungssystem ist inkonsistent; die Lösungsmenge ist leer.

(b) Wir bezeichnen die gesuchten Variablen mit $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$. Das der reduzierten Zeilenstufenform zugeordnete lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} x_1 - 6x_2 + 3x_5 &= -2 \\ x_3 + 4x_5 &= 7 \\ x_4 + 5x_5 &= 8 \end{aligned}$$

Man erkennt, dass man $x_5$ und $x_2$ als freie Parameter wählen kann:

$$x_1 = -2 + 6x_2 - 3x_5, \quad x_3 = 7 - 4x_5, \quad x_4 = 8 - 5x_5.$$

Selbstverständlich kann man auch andere freie Parameter wählen.
Geometrische Interpretation: Die Lösungsmenge ist eine *Ebene* im $\mathbb{R}^5$ durch den Punkt $(-2,0,7,8,0)^\top$ mit den beiden Spannvektoren $v_1 = (6,1,0,0,0)^\top$ und $v_2 = (-3,0,-4,-5,1)^\top$.

$$\text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c1) Man liest ab

$$\text{Lös}\, A, b = \{(-3,0,7)\}$$

Die Lösungsmenge ist ein Punkt im $\mathbb{R}^3$.

(c2) Die Variablen seien $x_1, x_2, x_3$ und $x_4$. Wir wenden den Gauß-Jordan-Algorithmus an und erzeugen in der 3.Spalte über der führenden 1 Nullen; und zwar addieren wir das $-4$fache der 3.Zeile zur zweiten Zeile und das $-8$fache der 3.Zeile zur 1.Zeile und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -13 & | & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist bereits die reduzierte Zeilenstufenform. Wir lesen die Lösungen ab, indem wir $x_4$ als freien Parameter wählen:

$$x_1 = -10 + 13x_4, \quad x_2 = -5 + 13x_4, \quad x_3 = 2 - x_4.$$

Es gibt eine einparametrige Lösungsschar im $\mathbb{R}^4$. Die Lösungsmenge ist eine Gerade durch den Punkt $(-10,-5,2,0)^\top$ mit Richtungsvektor $(13,13,-1,1)^\top$.

(d) Die Variablen seien mit $x_1, \ldots, x_5$ bezeichnet. Wir wenden den Gauß-Jordan-Algorithmus an. Zunächst erzeugen wir über der führenden 1 in der 4.Spalte eine Null in der 2.Zeile; dazu addieren wir das $(-1)$fache der 3.Zeile zur zweiten Zeile, die 4.Zeile wird gestrichen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}.$$

Nun erzeugen wir über der führenden Eins in der 2.Spalte eine Null in der 1.Zeile. Dazu addieren wir das Doppelte der 2.Zeile zur 1.Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -2 & | & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix liegt nun in der reduzierten Zeilenstufenform vor. Die Variablen $x_2$ und $x_5$ können frei gewählt werden. Somit lautet die allgemeine Lösung:

$$x_1 = -11 - 7x_2 + 2x_5, \quad x_3 = -4 - 3x_5, \quad x_4 = 9 - 3x_5.$$

Die Lösungsmenge ist eine *Ebene* im $\mathbb{R}^5$ durch den Punkt $(-11, 0, -4, 9, 0)^\top$ und den Spannvektoren $v_1 = (-7, 1, 0, 0, 0)^\top$ und $v_2 = (2, 0, -3, -3, 1)^\top$.

4. Lösen Sie mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus die folgenden linearen Gleichungssysteme **4 P**

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 27 \\ 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 28 \\ -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= -31. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 10y - 4z + w &= 1 \\ x + 4y - z + w &= 2 \\ 3x + 2y + z + 2w &= 5 \\ -x - 14y + 5z - 2w &= -3 \\ x - 6y + 3z \qquad &= 1. \end{aligned}$$

*Lösung.* (a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix zum lin. GS lautet

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & | & 27 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & | & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -1 & | & 28 \\ -4 & 3 & -2 & 3 & | & -31 \end{pmatrix}$$

Als erstes wollen wir die Eintrage $a_{31} = 2$ (dritte Zeile, erste Spalte) und $a_{41} = -4$ in der Matrix zu Nullen machen. Dazu machen wir die dritte elementare Zeilenoperation, addiere das $(-1)$fache der ersten Zeile zur dritten Zeile. Anschließend addieren wir das Doppelte der ersten Zeile zur vierten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & | & 27 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & | & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & | & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{4} & \mathbf{7} & | & \mathbf{23} \end{pmatrix}$$

Da wir aber Brüche nicht mögen, lassen wir die 2 so lange wie möglich stehen.
Als nächstes addieren wir das $(-1)$ fache der dritten Zeile zur zweiten und das doppelte der dritten Zeile zur vierten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & | & 27 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \mathbf{-3} \\ 0 & 3 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & | & \mathbf{25} \end{pmatrix}$$

In diesem Schritt haben wir zwar keine Nullen erzeugt, aber die Zeile 2 ist schon perfekt. Übersetzt man sie zurück in ein Gleichungssystem, so lautet sie $0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -3$ m.a.W., $x_2 = -3$.
Mit Hilfe dieser Zeile erzeugen wir Nullen in Zeile 3 und Zeile 4. Wir addieren das $-3$ fache der zweiten Zeile zur dritten Zeile und addieren die zweite Zeile zur vierten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & | & 27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & -3 & | & \mathbf{10} \\ 0 & \mathbf{0} & 6 & 1 & | & \mathbf{22} \end{pmatrix}$$

Addiert man nun noch das $(-6)$fache der dritten Zeile zur vierten Zeile, so hat man die gewünschte Dreiecksgestalt erreicht:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & | & 27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & | & 10 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{19} & | & \mathbf{-38} \end{pmatrix}.$$

Dividiert man die letzte Zeile durch 19, so hat man

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & | & 27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & | & \mathbf{-2} \end{pmatrix}.$$

Hiermit ist die Zeilenstufenform erreicht. Alles, was jetzt kommt, ist der Jordan-Schritt; wie müssen *über* der Diagonalen Nullen erzeugen.
Addiert man das dreifache der vierten Zeile zur dritten Zeile und das doppelte der vierten Zeile zur ersten Zeile, so hat man überall in der vierten Spalte über der 1 Nullen erzeugt:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & \mathbf{0} & | & \mathbf{31} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & | & \mathbf{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}.$$

Als Letztes addieren wir das $-3$fache der dritten Zeile zur ersten Zeile, das 5fache der zweiten Zeile zur ersten Zeile und dividieren die erste Zeile durch 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & | & \mathbf{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & | & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}.$$

Die eindeutig bestimmte Lösung liest man nun auf der rechten Seite ab: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -3, 4, -2)$.
(b) Wir wenden den Gauß-Jordan-Algorithmus auf das GS an:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | -4 | 1 | 1 | Zeile 1 $\longleftrightarrow$ Zeile 2 |
| 1 | 4 | -1 | 1 | 2 | |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 5 | |
| 1 | -14 | 5 | - 2 | = -3 | |
| 1 | -6 | 3 | 0 | 1 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | -1 | 1 | 2 | $\cdot(-3)$ $\cdot(-1)$ $\cdot(-1)$ |
| 0 | 10 | -4 | 1 | 1 | |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 5 | |
| 1 | -14 | 5 | - 2 | = -3 | |
| 1 | -6 | 3 | 0 | 1 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | -1 | 1 | 2 | |
| 0 | 10 | -4 | 1 | 1 | |
| 0 | -10 | 4 | -1 | -1 | |
| 0 | -10 | 4 | -1 | -1 | |
| 0 | -10 | 4 | -1 | -1 | |

Die Zeile 2, 3, 4 und 5 stimmen überein. Daher kann man zwei von ihnen streichen.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | -1 | 1 | 2 | |
| 0 | 10 | -4 | 1 | 1 | $:10$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | -1 | 1 | 2 | |
| 0 | 1 | -2/5 | 1/10 | 1/10 | $\cdot(-4)$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3/5 | 3/5 | 8/5 | |
| 0 | 1 | -2/5 | 1/10 | 1/10 | $\cdot(-4)$ |

Die reduzierte Zeilenstufenform liegt vor. Die Variablen $z$ und $w$ sind frei wählbar:

$$x = 8/5 - 3/5z - 3/5w, \quad y = 1/10 + 2/5z - 1/10w.$$

Die Lösungsmenge ist eine *Ebene* im $\mathbb{R}^4$ durch den Punkt $(8/5, 1/10, 0, 0)^\top$ mit den Spannvektoren $v_1 = (-3/5, 2/5, 1, 0)^\top$ und $v_2 = (-3/5, -1/10, 0, 1)^\top$.