Lösungen

Lineare Algebra für Physiker, Serie 13

Abgabe am 24.1.2008

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen A:

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Wenn möglich, diagonalisieren Sie die Matrix, d. h., geben Sie eine Matrix S an und eine Diagonalmatrix A' mit $A' = S^{-1}AS$. **6 P**

Lösung. Diese Lösung arbeitet mit den **transponierten** Matrizen. Das ändert nichts an den Eigenwerten und Vielfachheiten, aber an den Eigenvektoren.

(a) Charakteristisches Polynom:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$. Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2$:

$$v_1 = (1,0,1)^\top, \quad v_2 = (0,1,0)^\top,$$

zu $\lambda_2 = -1$ ist $v_3 = (7,-6,4)^\top$ Eigenvektor. Die Matrix ist diagonalisierbar, da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, also eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Sei $S^{-1} := (v_1\ v_2\ v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann gilt

$$S^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/3 & 0 & 7/3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Das charkteristische Polynom ist $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$. Die Eigenwerte von A sind also 2 und 3. Es gibt nur einen Eigenvektor zum Eigenwert 2, nämlich $v_1 = (0,2,1)^\top$ und einen Eigenvektor zum Eigenwert 3 und zwar $v_2 = (0,1,1)^\top$. Die Matrix ist nicht diagonalisierbar.

2. Es sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_4$ eine Permutation und $P_\sigma \in \mathrm{L}(\mathbb{C}^4)$ die zugehörige Permutationsabbildung, das heißt, $P_\sigma(\mathrm{e}_k) = \mathrm{e}_{\sigma(k)}$ für alle $k = 1, \ldots, 4$.

(a) Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, reelle und komplexe Eigenwerte und deren algebraische und geometrische Vielfachheiten.

(b) Bestimmen Sie zu den reellen Eigenwerten je einen Eigenvektor.

5 P

Lösung. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $\chi_P(\lambda) = \det(\lambda I_4 - P) = \lambda^4 - 1$. Die Eigenwerte von P sind also die vierten Einheitswurzeln

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \mathrm{i},$$
$$\lambda_3 = -1, \qquad \lambda_4 = -\mathrm{i}.$$

Wegen $P(1,1,1,1)^\top = (1,1,1,1)^\top$ und $P(1,-1,1,-1) = (-1,1,-1,1)$ ist $(1,1,1,1)^\top$ Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$ und $(1,-1,1--1)^\top$ Eigenvektor zu $\lambda_3 = -1$.

3. Bestimmen Sie die Eigenwerte, ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten und die zugehörigen Eigenräume:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 P

Lösung.

A hat Jordan-Form. Die Eigenwerte von A sind daher die Einträge auf der Hauptdiagonalen: $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$.

Algebraische Vielfachheit von 2: 5.
Geometrische Vielfachheit von 2: 3 (Anzahl der Jordankästchen).
Wegen $Ae_1 = e_1$ und $Ae_4 = e_4$ ist der Eigenraum zu $\lambda_1 = 2$ gleich $\operatorname{lin}\{e_1,\, e_6\, e_7\}$.

Algebraische Vielfachheit von 1: 2.
Geometrische Vielfachheit von 1: 1 .
Eigenraum zu 1 : $\operatorname{lin}\{e_4\}$.

(b) folgt aus dem Übungsmaterial OLAT/Materialien/ue9.pdf (oder ue9.ps), Aufgabe 3 (b).

4. Es sei $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Ferner sei $S \in L(\mathbb{R}^3)$ die *Spiegelung* an der Ebene U, das heißt, S ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$S(1,2,3) = -(1,2,3), \quad S(u) = u \quad \forall\, u \in U.$$

Geben Sie eine Basis an, in der S Diagonalgestalt hat. Berechnen Sie $S(3,2,1)$. **4 P**

5. Es sei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine fixierte Matrix und $T \in L(\mathbb{R}^{2\times 2})$ gegeben durch Linksmultiplikation mit B, $T(A) = BA$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von T.
(b) Bestimmen Sie im Falle $a = b = c = d = 1$ die Eigenwerte und -vektoren von T. **4 P**

Lösung.

$$\chi_T(\lambda) = ((\lambda - a)(\lambda - d) - bc)^2.$$

Im obigen Spezialfall hat man $\chi_T(\lambda = \lambda^2(\lambda - 2)^2$. Man erhält jeweils als 2 als Dimension des zugehörigen Eigenraumes. T ist diagonalisierbar mit Eigenbasis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$