Lösungen

Lineare Algebra für Physiker, Serie 12

Abgabe am 17. 1. 2008

1. Es sei $V = \mathbb{R}^4$ der euklidische Raum mit dem Standardskalarprodukt und der ONB aus Beispiel 5.5, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ mit $b_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $b_2 = \frac{1}{2}(-1,1,-1,1)$, $b_3 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$, $b_4 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)\}$. Ferner sei $U = \operatorname{lin}\{b_1, b_2\}$ und $v = (a,b,c,d) \in V$.

   (a) Berechnen Sie die Projektion $P_U(v)$ auf U.

   (b) Berechnen Sie die Projektion $P_{U^\perp}(v)$ auf $U^\perp$.

   (c) Berechnen Sie den Abstand des Vektors $w = (2,4,1,3)$ von U.

   (d) Bestimmen Sie die Matrizen $S = M_B(P_U)$ und $T = M_{B_4}(P_U)$ der Projektion bezüglich der Basis B bzw. bzgl. der Standardbasis B_4 des $\mathbb{R}^4$. Berechnen Sie S^*, S^2, T^*, T^2. **4 P**

   Lösung. (a), (b) Nach Formel (12) im Beweis des Projektionssatzes ist die explizite Formel für P_U

$$\begin{aligned}
P_U(v) &= \langle v\,,\, b_1\rangle\, b_1 + \langle v\,,\, b_2\rangle\, b_2 = \\
&= \frac{1}{4}\,\langle (1,1,1,1), (a,b,c,d)\rangle\,(1,1,1,1) + \frac{1}{4}\,\langle (-1,1,-1,1), (a,b,c,d)\rangle\,(-1,1,-1,1) \\
&= \frac{1}{4}(a+b+c+d)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}(-a+b-c+d)\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+c\\b+d\\a+c\\b+d\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} =: T'v.
\end{aligned}$$

   Die Projektion $P_{U^\perp}(v) = \langle b_3\,,\, v\rangle\, b_3 + \langle b_4\,,\, v\rangle\, b_4$ kann man analog berechnen oder man benutzt, $P_{U^\perp} = \mathrm{id}_V - P_U$ und erhält sofort

$$P_{U^\perp}(v) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a-c\\b-d\\-a+c\\-b+d\end{pmatrix}.$$

   (c) Nach dem Satz vom kleinsten Abstand gilt

$$\min_{u\in U}\|w-u\| = \|P_{U^\perp}(w)\| = \left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix}\right\| = \left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\| = 1.$$

   (d) Wegen

$$P_U(b_1) = b_1, \quad P_U(b_2) = b_2, \quad P_U(b_3) = 0, \quad P_U(b_4) = 0,$$

liest man sofort ab:

$$S = M_B(P_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $v = (a, b, c, d)$ in der Standardbasis B_4 gegeben ist, lautet $T = M_{B_4}(P_U) = T'$. Es gilt $S^* = S^2 = S$ und $T^* = T^2 = T$.

Bemerkung. Dies ist übrigens die algebraische Charakterisierung einer Projektionsmatrix: Genau dann, wenn $P^2 = P = P^*$, ist P eine Projektion. Der zugehörige Teilraum, auf den projiziert wird ist $U = \operatorname{Im} P$.

2. Vier Messpunkte $\{(x_i, y_i) \mid i = 1,2,3,4)\} = \{(0,1),(1,3),(2,4),(3,4)\}$, sollen durch eine Gerade $y = f(x) = ax + b$ angenähert werden, gesucht sind also a und b, und zwar so, dass der Abstand d mit

$$d^2 = (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + (f(x_3) - y_3)^2 + (f(x_4) - y_4)^2$$

minimal wird (Kleinste-Quadrate-Lösung). Führen Sie dazu die folgenden Schritte aus. Betrachten Sie das inkonsistente lineare Gleichungssystem $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = y$:

$$\begin{aligned} 0a + b &= 1 \\ 1a + b &= 3 \\ 2a + b &= 4 \\ 3a + b &= 4. \end{aligned} \qquad \text{mit Koeffizientenmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

den Variablen $(a, b)^\top$ und der rechten Seite $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^\top = (1,3,4,4)^\top$.

(a) Zwischen welchen Räumen V und W bildet $T_A \colon V \to W$ ab? Bestimmen Sie das Bild $U = \operatorname{Im} A \subset W$, eine ONB von U.

(b) Berechnen Sie die Projektion $y' = P_U(y)$ zu $y = (1,3,4,4)^\top \in \mathbb{R}^4$ und den euklidischen Abstand s des Vektors y von U.

(c) Geben Sie alle Lösungen $(a, b)^\top$ des (konsistenten) linearen Gleichungssystems $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = y'$. an.

(d) Skizzieren Sie die erhaltene Gerade $y = ax + b$ sowie die vier Messpunkte. Berechnen Sie d^2 für die Gerade $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$. **6 P**

Lösung. (a) Es ist $T_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Der Rang kann also höchstens gleich $\min\{2,4\} = 2$ sein. Da beide Spalten linear unabhängig sind, ist der Rang tatsächlich gleich 2. Das Bild $U = \operatorname{Im} A$ wird aufgespannt von den beiden Spalten der Matrix A

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren finden wir die ONB von U als

$$b_1 = f_1/\left\|f_1\right\| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \tilde{b_2} = f_2 - \langle f_2\,, b_1\rangle\, b_1$$
$$= \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Damit ist $b_2 = \tilde{b_2}/\left\|\tilde{b_2}\right\| = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$.

(b) Nach dem Projektionssatz ist

$$y' = P_U(y) = \frac{1}{4}\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\\4\end{pmatrix}\right\rangle + \frac{1}{20}\left\langle \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\\4\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\5/2\\7/2\\9/2\end{pmatrix}.$$

Damit gilt $s = \left\|y - y'\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2} = 1$.

(c) Wendet man den Gauß-Algorithmus auf die erweiterte Koeffizientenmatrix an (Subtraktion der ersten Zeile von allen anderen), so bestätigt sich noch einmal die Konsistenz und man erhält eine eindeutig bestimmte Lösung $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{3}{2}\\1 & 1 & \frac{5}{2}\\2 & 1 & \frac{7}{2}\\3 & 1 & \frac{9}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{3}{2}\\1 & 0 & 1\\2 & 0 & 2\\3 & 0 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & \frac{3}{2}\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(d) Für diese Gerade ist der Funktionswertevektor $y'' = (9/4, 3, 15/4, 18/4)$ und damit der Abstandsvektor $y - y'' = (-5/4, 0, 1/4, -2/4)$ und man hat $d^2 = 30/16 > 1$.

3. Es sei V ein endlichdimensionaler Raum mit Skalarprodukt und U ein linearer Teilraum von V. Beweisen Sie mit Hilfe des Projektionssatzes die Identität $(U^{\perp})^{\perp} = U$. **4 P**
Hinweis. Zeigen Sie die einfache Richtung $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$ und benutzen Sie dann Lemma 2.6 (c) und Satz 2.7.

Beweis. Es sei $\dim V = n$ und $\dim U = k$.
(a) Für alle $u \in U$ und $v \in U^\perp$ gilt $\langle u\,,\,v\rangle = 0$. Also ist jeder Vektor $u \in U$ senkrecht auf allen Vektoren aus $U^\perp$; also $u \in (U^\perp)^\perp$. Somit gilt $U \subset (U^\perp)^\perp$.

Nach dem Projektionssatz gelten die beiden Identitäten

$$V = U \oplus U^\perp = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp.$$

Wegen der Dimensionsformel und der Direktheit der Summe hat man daher

$$n = k + \dim U^\perp = \dim U^\perp + \dim (U^\perp)^\perp.$$

Also gilt $n - \dim U^\perp = \dim U = k = \dim (U^\perp)^\perp$. Somit haben die beiden Teilräume U und $U^\perp$ dieselbe Dimension. Nach Satz 2.7 müssen sie dann gleich sein.

■

4. Gegeben sei die Abbildung $T \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_2 + 2x_3, x_3)$.
Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von T. **3 P**

Lösung. Wir zeigen, dass $\lambda_1 = 1$ Eigenwert ist zum einzigen Eigenvektor $v = (0,0,1)$ und $\lambda_2 = 0$ Eigenwert zum einzigen Eigenvektor $(1,0,0)$ ist.

Sei also λ ein Eigenwert mit Eigenvektor $v = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$. Die Eigenwertgleichung lautet $T(v) = (x_2, x_2 + 2x_3, x_3) = \lambda v = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$. Damit gilt

$$\lambda x_1 = x_2, \quad \lambda x_2 = x_2 + 2x_3, \quad \lambda x_3 = x_3.$$

Fall 1. Sei $\lambda_2 = 0$. Dann lautet die Eigenwertgleichung

$$0 = x_2, \quad 0x_2 = x_2 + 2x_3, \quad 0 = x_3.$$

Das lin. GS ist konsistent mit der einparametrigen Lösung $v_2 = (x_1, 0, 0)$, $x_1 \in \mathbb{R}$.

Fall 2. $\lambda_1 = 1$. Dann lautet die Eigenwertgleichung

$$x_1 = x_2, \quad x_2 = x_2 + 2x_3, \quad x_3 = x_3.$$

Die einparametrige Lösung diese lin GS lautet $v_2 = (\mu, \mu, 0)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Fall 3. $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$. Aus der dritten Gleichung folgt zunächst $x_3 = 0$, aus der zweiten dann weiter $x_2 = 0$ und schließlich in der ersten $x_1 = 0$. Jedoch ist $v = 0$ *kein* Eigenvektor. Somit existiert kein weiterer Eigenvektor für T.

Man beachte, dass es in diesem Falle weniger Eigenvektoren gibt als $3 = \dim V$.