Lösungen

Lineare Algebra für Physiker, Serie 11

Abgabe am 10.1.2008

1. Bestimmen Sie jeweils eine Lösung $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ bzw. $(a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{R}^5$, sodass

   (a) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} a & -3 & 2 \\ b & 6 & 3 \\ c & d & 6 \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ b & c & -2 \\ d & e & f \end{pmatrix}$

   orthogonale Matrizen sind. **4 P**

   Lösung. (a) Zeilen und Spalten der Matrix müssen jeweils normiert sein, d. h.

   $$a^2+9+4=49 \Longrightarrow a\in\{-6,6\},$$
   $$b^2+36+9=49 \Longrightarrow b\in\{-2,2\}.$$

   Damit gilt

   $$49=a^2+b^2+c^2=36+4+c^2 \Longrightarrow c\in\{-3,3\}.$$

   Erste und zweite Zeile sind zueinander orthogonale Vektoren, also

   $$ab-18+6=0 \Longrightarrow ab=12,$$

   also haben a und b dasselbe Vorzeichen, $\operatorname{sign}(a)=\operatorname{sign}(b)$. Erste und dritte Spalte sind zueinander orthogonal, also

   $$2a+3b+6c=0 \Longrightarrow \operatorname{sign}(c)=-\operatorname{sign}(a)=-\operatorname{sign}(b).$$

   Erste und zweite Spalte sind zueinander orthogonal:

   $$-3a+6b+cd=0.$$

   Unabhängig von der Verteilung der Vorzeichen von a,b,c folgt hieraus $d=-2$. Insgesamt erhalten wir zwei mögliche Lösungen:

   $$a=6,\ b=2,\ c=-3,\ d=-2 \text{ bzw. } a=-6,\ b=-2,\ c=3,\ d=-2.$$

   (b) Wir zeigen, dass es genau 8 Lösungen gibt, so dass die Matrix orthogonal wird. Dazu bezeichnen wir die Zeile und Spalten der Matrix mit z_i bzw. s_i, $i=1,2,3$. Wegen $\|z_1\|^2=1$ folgt $a^2=1$. Wegen $\|s_3\|^2=1$ folgt dann weiter $f^2=1$. Es gibt somit 4 Lösungen $(a,f)\in\{(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2)\}$. Wegen der Normiertheit von z_2 und z_3 sowie s_1 und s_2 folgt

   $$b^2+c^2=b^2+d^2=d^2+e^2=c^2+e^2=5.$$

   Hieraus folgt sofort $c^2=d^2$ und $b^2=e^2$. Wir können also (bis auf das Vorzeichen) alle Gleichungen mit d,e durch b,c ausdrücken. Die Orthogonalität von s_1 und s_2 liefert

   $$4+bc+de=0 \Longrightarrow bc+de=-4 \Longrightarrow b^2c^2+d^2e^2+2bcde=2b^2c^2+2bcde=16.$$

Wäre die Vorzeichenverteilung so, dass $bc = -de$, dann führte dies auf den Widerspruch $2b^2c^2 - 2b^2c^2 = 0 = 16$. Also gilt

$$bc = de \quad \text{und} \quad 4b^2c^2 = 16 \Longrightarrow b^2c^2 = 4.$$

Zusammen mit $b^2 + c^2 = 5$ erhält man hieraus nun $\{b^2, c^2\} = \{1, 4\}$.

Fall 1. $|b| = |e| = 2$ und $|c| = |d| = 1$. Aus $z_1 \perp z_2$ folgt $2b + 2c - 2a = 0$, also $a = b + c$. Wegen $|a| = 1$ folgt hieraus, dass a und c nicht dieselben haben können, also gilt $1 = 2 - 1$ oder $-1 = -2 + 1$, also hat man $b = 2a$, $c = -a$. Setzt man dies ein und beachtet, dass $z_2 \perp z_3$ gilt, so hat man

$$2ad - ae - 2f = 0 \,|\, \cdot a \Longrightarrow 2d - e = 2af.$$

Nun ist aber $|2d| = |-e| = 2$ und $\left|2af\right| = 4$. Gleichheit kann also nur herrschen, wenn alle 3 Summanden die gleichen Vorzeichen haben:

$$2d = -e = af \Longrightarrow d = \frac{1}{2}af, \quad e = -af.$$

In der Tat ist für alle Wahlen von $a^2 = 1$, $f^2 = 4$ die Matrix

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ 2a & -a & -2 \\ \frac{1}{2}af & -af & f \end{pmatrix}$$

orthogonal und es gibt vier Lösungen.

Fall 2 $|b| = |e| = 1$ und $|c| = |d| = 1$. Wie oben folgt $a = b + c$ und b, c können nicht dieselben Vorzeichen haben. Wegen $1 = 2 - 1$ und $-1 = -2 + 1$ folgt $b = -a$ und $c = 2a$. Wie oben folgt $c = -af$ und $d = \frac{1}{2}af$. In der Tat ist die Matrix

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ -a & 2a & -2 \\ -af & \frac{1}{2}af & f \end{pmatrix}$$

orthogonal (4 Lösungen). Es gibt also insgesamt 8 Lösungen.

2. Es sei $V = \mathbb{C}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Wenden Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Vektoren $c_1 = (1, 0, \mathrm{i})$, $c_2 = (2, 1, 1 + \mathrm{i})$ und $c_3 = (0, 1, 0)$ **in dieser Reihenfolge** an.

4 P

Lösung. Um das eindeutig bestimmte NOS b_1, b_2, b_3 zu bestimmen mit $\mathrm{lin}\{c_1\} =$

$\operatorname{lin}\{b_1\}$, $\operatorname{lin}\{c_1, c_2\} = \operatorname{lin}\{b_1, b_2\}$, $\operatorname{lin}\{c_1, c_2, c_3\} = \operatorname{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$ berechnet man:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\|c_1\|} c_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,\mathrm{i}), \\
\tilde{b_2} &= c_2 - \langle c_2\,,\, b_1\rangle\, b_1 = (2,1,1+\mathrm{i}) - \frac{1}{2}(3-\mathrm{i})(1,0,\mathrm{i}) = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i},2,1-\mathrm{i}), \\
b_2 &= \frac{1}{\left\|\tilde{b_2}\right\|}\tilde{b_2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\mathrm{i},2,1-\mathrm{i}), \\
\tilde{b_3} &= c_3 - \langle c_3\,,\, b_1\rangle\, b_1 - \langle c_3\,,\, b_2\rangle\, b_2, \\
&= (0,1,0) - 0 - \frac{1}{4}(1+\mathrm{i},2,1-\mathrm{i}) = \frac{1}{4}(-1-\mathrm{i},2,-1+\mathrm{i}), \\
b_3 &= \frac{1}{\left\|\tilde{b_3}\right\|}\tilde{b_3} = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1-\mathrm{i},2,-1+\mathrm{i}).
\end{aligned}
$$

3. (a) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie: $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ (komplexe Konjugation).
(b) Zeigen Sie: $A \in \mathrm{U}(n) \Longrightarrow |\det A| = 1$.
(c) Gibt es Matrizen $A \in \mathbb{C}^{1\times 1}$ mit $|\det A| = 1$, die nicht unitär sind? Gibt es Matrizen $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $|\det A| = 1$, die nicht unitär sind?
(d) Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$
\left\{ \begin{pmatrix} a+b\mathrm{i} & c+d\mathrm{i} \\ -c+d\mathrm{i} & a-b\mathrm{i} \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a^2+b^2+c^2+d^2 = 1 \right\}
$$

unitär sind. **8 P**

Lösung.

(a) Für $A := (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ist (Leibniz)

$$
\begin{aligned}
\det \overline{A} &= \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sign}(\tau)\cdot \overline{a}_{1\tau(1)}\cdot\ldots\cdot\overline{a}_{n\tau(n)} \\
&= \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sign}(\tau)\cdot \overline{a_{1\tau(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\tau(n)}} \\
&= \overline{\sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sign}(\tau)\cdot a_{1\tau(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\tau(n)}} \\
&= \overline{\det A}.
\end{aligned}
$$

(b) Sei $A \in \mathrm{U}(n)$. Dann gilt mit (a)

$$
1 = \det I_n = \det A^* A = \det A^* \det A = \overline{\det A^\top} \det A = \overline{\det A} \det A,
$$

also $|\det A| = (\overline{\det A} \det A)^{1/2} = 1$.

(c) Nach Beispiel 5.8 der Vorlesung ist $\mathrm{U}(\mathbb{C}^1) = \{z \,:\, |z| = 1\}$, also existieren solche Matrizen nicht. Die Matrix

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}
$$

ist nicht unitär, doch $|\det A| = 1$.

(d) Direktes Ausrechnen zeigt für eine beliebige Matrix A aus dieser Menge: $A^*A = AA^* = I_2$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr
wünschen Ihnen Florin Belgun und Axel Schüler.