Lösungen

Lineare Algebra für Physiker, Serie 10

Abgabe am 20. 12. 2007

1. Es seien a_i, $i = 1,\dots,4$ und b reelle Zahlen. Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & 0 & 0 \\ b & a_2 & b & 0 \\ 0 & b & a_3 & b \\ 0 & 0 & b & a_4 \end{vmatrix}.$$

4 P

Lösung. Entwickeln nach der ersten Zeile, ausklammern von b in der ersten Zeile der zweiten Determinante und Anwenden der Sarrusschen Regel liefert

$$\begin{aligned} D &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b & 0 \\ b & a_3 & b \\ 0 & b & a_4 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & b & 0 \\ 0 & a_3 & b \\ 0 & b & a_4 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b & 0 \\ b & a_3 & b \\ 0 & b & a_4 \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a_3 & b \\ 0 & b & a_4 \end{vmatrix} \\ &= a_1(a_2a_3a_4 - b^2a_2 - b^2a_4) - b^2 \begin{vmatrix} a_3 & b \\ b & a_4 \end{vmatrix} \\ &= a_1a_2a_3a_4 - b^2(a_1a_2 + a_1a_4 + a_3a_4) + b^4. \end{aligned}$$

2. Zwei Leuchttürme K und L stehen 2km voneinander entfernt direkt an der Küste. Ein erstes Schiff hat von K den Abstand 4km und von L den Abstand 3km. Ein zweites Schiff hat von K den Abstand 5km und von L den Abstand 6km.

   Berechnen Sie den Abstand der beiden Schiffe auf 10m genau. **4 P**

   Hinweis. Die Erdkrümmung soll vernachlässigt werden. Ein Rechner darf benutzt werden.

   Lösung. Wir verwenden die Formel aus 4.2. (d) für die paarweisen Abstände von vier Punkten in der Ebene, dann gilt für den gesuchten Abstand y der beiden Schiffe:

$$\begin{vmatrix} 0 & y^2 & 16 & 9 & 1 \\ y^2 & 0 & 25 & 36 & 1 \\ 16 & 25 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 36 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

   Dies liefert eine biquadratische Gleichung in y mit zwei positiven Lösungen $y_1 = 4840\text{m}$ und $y_2 = 8820\text{m}$. Die zweite Lösung entfällt, da sonst das Schiff 4km im Landesinneren liegen würde. Eventuell liegt eine Insel vor, dann kämen beide Lösungen in Frage.

   Mit Hilfe von MAPLE-Befehlen sieht dies so aus — MUPAD ist ähnlich.

```
> with(linalg);

A:= matrix(5,5, [0,   x,   16,   9,  1,
 x,   0,    25,    36,1,
16, 25,    0,    4,1,
9,  36,   4,    0,  1,
        1,  1,     1,     1, 0]);

                                     [0     x     16     9    1]
                                     [                         ]
                                     [x     0     25    36    1]
                                     [                         ]
                                A := [16    25     0     4    1]
                                     [                         ]
                                     [9     36     4     0    1]
                                     [                         ]
                                     [1     1      1     1    0]

> B:=det(A);
                                         2
                            B := -8 x  + 810 x - 14580

> s:= solve(B=0,x);
                                            1/2                  1/2
                                       27 65                27 65
                         s := 405/8 - --------, 405/8 + --------
                                          8                    8

> y:=sqrt(s[1]);
                                                   1/2 1/2
                                      3 (90 - 6 65   )
                               y := -------------------
                                               4

> z:=sqrt(s[2]);
                                                   1/2 1/2
                                      3 (90 + 6 65   )
                               z := -------------------
                                               4

> evalf(y);
                                        4.838892446

> evalf(z);
                                        8.822421428

>
```

3. Durch welche Abbildungen wird ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert? Für $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ und $y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ setzten wir

   (a) $\langle x\,,\,y\rangle=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2$.

   (b) $\langle x\,,\,y\rangle=4x_1y_1+3x_2y_2+x_3y_3+2x_1y_2+2y_1x_2-x_2y_3-y_2x_3$.

   (c) $\langle x\,,\,y\rangle=x_1y_1+2x_2y_2$. **4 P**

   Lösung. (a) Da $\langle 0,\,e_1\rangle=(0-1)^2=1\neq 0$, ist die Linearität verletzt, und die gegebene Abbildung definiert kein Skalarprodukt.

$$\text{(b)}\ \langle \lambda x+\mu z\,,\,y\rangle=4(\lambda x_1+\mu z_1)y_1+3(\lambda x_2+\mu z_2)y_2+(\lambda x_3+\mu z_3)y_3+2(\lambda x_1+\mu z_1)y_2$$
$$+2y_1(\lambda x_2+\mu z_2)-(\lambda x_2+\mu z_2)y_3-y_2(\lambda x_3+\mu z_3)$$
$$=\lambda\langle x\,,\,y\rangle+\mu\langle z\,,\,y\rangle \quad \text{für alle } x,y,z\in\mathbb{R}^3,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

   Die Symmetrie ist offensichtlich.
   Für die Definitheit beachtet man $\langle x\,,\,x\rangle=(2x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+x_2^2\geq 0$ und weiterhin

$$\langle x\,,\,x\rangle=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x_1+x_2=0,\ x_2-x_3=0,\ x_2=0$$
$$\Leftrightarrow\quad x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0,$$

   so dass die gegebene Abbildung ein Skalarprodukt definiert.

   (c) SKP: nein. Für $x=y=\mathrm{e}_3=(0,0,1)$ hat man $\langle x\,,\,x\rangle=0$, was der Definitheit widerspricht. Die Klammer definiert also kein Skalarprodunkt.

4. Für $A,B\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ setzen wir $\langle A,\,B\rangle=\operatorname{tr}(B^*A)$. Ist dadurch ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert? **4 P**

   Lösung. (a) Die gegebene Abbildung definiert ein Skalarprodukt, weil

$$\langle A,\,B\rangle=\operatorname{tr}(B^*A)=\sum_{i,j=1}^{2}\overline{b_{ji}}a_{ji}$$

   und somit die Linearität im ersten Argument offensichtlich ist. Außerdem gilt

$$\langle A,\,B\rangle=\sum_{i,j=1}^{2}\overline{b_{ji}\overline{a_{ji}}}=\overline{\sum_{i,j=1}^{2}b_{ji}\overline{a_{ji}}}=\overline{\langle B\,,A\rangle},\qquad \langle A,\,A\rangle=\sum_{i,j=1}^{2}\overline{a_{ji}}a_{ji}=\sum_{i,j=1}^{2}\left|a_{ji}\right|^2\geq 0,$$
$$\langle A,\,A\rangle=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left|a_{ji}\right|=0 \text{ für alle } i,j=1,2 \quad\Leftrightarrow\quad A=\left(a_{i,j}\right)=0.$$

5. (a) Es sei V ein Raum mit Skalarprodukt und $\|x\|=\sqrt{\langle x\,,\,x\rangle}$ die zugehörige Norm. Zeigen Sie, dass die *Parallelogrammidentität* gilt:

$$\|a-c\|^2+\|a+c\|^2=2(\|a\|^2+\|c\|^2)\qquad\forall\, a,c\in V.$$

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ mit $\|(x_1,x_2)\|:=\max\{|x_1|,|x_2|\}$ ein normierter Raum ist.

   (c) Zeigen Sie, dass die Norm in (b) die Parallelogrammidentität nicht erfüllt.

   6 P

Lösung.

(a) $$\begin{aligned}\|a-c\|^2+\|a+c\|^2 &= \langle a-c\,,\,a-c\rangle+\langle a+c\,,\,a+c\rangle\\ &=(\langle a\,,\,a\rangle-\langle a\,,\,c\rangle-\langle c\,,\,a\rangle+\langle c\,,\,c\rangle)+(\langle a\,,\,a\rangle+\langle a\,,\,c\rangle+\langle c\,,\,a\rangle+\langle c\,,\,c\rangle)\\ &=2(\|a\|^2+\|c\|^2).\end{aligned}$$

(b) **Die Lösung bezieht sich auch eine andere Norm. Für die in der Aufgabe gegebene Maximumnorm verläuft der Beweis ähnlich.**

$$\begin{aligned}&\|(x_1,x_2)\|=|x_1|+|x_2|\geq 0,\\ &\text{und } \|(x_1,x_2)\|=0 \quad\Leftrightarrow\quad |x_1|=0,\,|x_2|=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x_1,x_2)=(0,0),\\ &\|(\lambda x_1,\lambda x_2)\|=|\lambda x_1|+|\lambda x_2|=|\lambda|(|x_1|+|x_2|)=|\lambda|\,\|(x_1,x_2)\|,\\ &\left\|(x_1+y_1,x_2+y_2)\right\|=\left|x_1+y_1\right|+\left|x_2+y_2\right|\\ &\leq |x_1|+\left|y_1\right|+|x_2|+\left|y_2\right|=\|(x_1,x_2)\|+\left\|(y_1,y_2)\right\|.\end{aligned}$$

(c) Mit $a=\mathrm{e}_1=(1,0)$, $c=\mathrm{e}_2=(0,1)$ ist $\|a\|=\|c\|=\|a-c\|=\|a+c\|=\max\{0,1\}=1$, also

$$\|a-c\|^2+\|a+c\|^2=2\neq 2\cdot 2=2(\|a\|^2+\|c\|^2).$$

Für diese beiden Vektoren ist die Parallelogrammidentität nicht erfüllt ist.